# Секция 1

# Физические науки

## 1.1 Оптика

Научная статья
УДК 535.3
ББК 22.343
ГРНТИ 29.31.21
ВАК 1.3.6.
PACS 42.25.Bs
OCIS 160.3918
MSC 78A25

### Исследование оптических свойств гиперболического метаматериала для оптического спектрального диапазона

К. К. Алтунин [1]

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», 432000, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 8 июля 2026 года
После переработки 10 июля 2026 года
Опубликована 30 сентября 2026 года

**Аннотация.** Представлены результаты теоретического и численного исследования оптических свойств гиперболического метаматериала для оптического спектрального диапазона. Гиперболические метаматериалы представляют собой класс анизотропных сред, у которых одна или две главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют знак, противоположный остальным. Разработана модель гиперболических метаматериалов, учитывающая анизотропию, диссипацию и пространственную дисперсию, на основе которой получены аналитические выражения для тензора диэлектрической проницаемости, дисперсионных соотношений. Разработана численная модель оптических процессов в плёнках из гиперболического метаматериала, основанная на приближении Максвелл–Гарнетта. Проведены численные расчёты эффективных параметров среды таких, как показатель преломления, поверхностный импеданс, коэффициентов оптического отражения, пропускания, поглощения, подтвердившее корректность аналитических результатов. Показано, что гиперболические метаматериалы обладают сильным локальным усилением поля.

[1] E-mail: kostya_altunin@mail.ru

**Ключевые слова:** анизотропия, оптические свойства, плоская электромагнитная волна, метаматериал, гиперболический метаматериал, нанофотоника, коэффициент отражения, коэффициент пропускания, приближение эффективной среды, локальное усиление поля

## Введение

Актуальность исследования обусловлена интенсивным развитием нанофотоники и метаматериалов, открывающих пути к управлению светом на субволновых масштабах, недоступных для обычных диэлектриков и металлов. Гиперболические метаматериалы представляют собой класс анизотропных сред, у которых одна или две главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют знак, противоположный остальным.

Целью работы является исследование зависимостей коэффициентов отражения и пропускания для плоской электромагнитной волны, падающей из вакуума на плоскую границу раздела с полубесконечным гиперболическим метаматериалом.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи. Во-первых, необходимо написать обзор научной литературы по исследованию гиперболических метаматериалов. Во-вторых, требуется решить граничную задачу для распространения электромагнитных волн в одноосном гиперболическом метаматериале, учитывая возможную комплексность компонент тензора $\hat{\varepsilon}$ для описания потерь, то есть найти амплитуды отражённой и прошедшей волн, удовлетворив условиям непрерывности тангенциальных компонент полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границе раздела. В-третьих, необходимо провести параметрический анализ полученных коэффициентов Френеля в зависимости от угла падения, поляризации и соотношения между $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$.

Объектом научного исследования является полубесконечное однородное анизотропное полупространство, характеризуемое тензором диэлектрической проницаемости для гиперболического метаматериала. Предметом научного исследования выступают энергетические коэффициенты оптического отражения $R$ и пропускания $T$, а также фазы отражённой и прошедшей волн для плёнки из гиперболического метаматериала.

Гипотеза научного исследования заключается в том, что уникальные дисперсионные свойства гиперболических метаматериалов, обусловленные гиперболической формой изочастотной поверхности, приводят к качественно новым, по сравнению с обычными средами, режимам оптического отражения и пропускания, включая эффекты отрицательного рефракции, резкой угловой селективности и усиления ближнего поля.

В рамках работы применяются следующие методы исследования такие, как аналитические методы решения уравнений Максвелла для анизотропной среды, метод стационарной фазы для анализа распространения ограниченных пучков через границу раздела сред, методы численного моделирования с учётом диссипации и анализа устойчивости решений путём сканирования параметров $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ в комплексной плоскости. Материалами исследования служат модельные диэлектрические проницаемости, описывающие два основных типа гиперболических метаматериалов.

Научная новизна исследования заключается в том, что впервые в явном виде получены и проанализированы амплитудные и энергетические коэффициенты оптического отражения и пропускания для полубесконечного гиперболического метаматериала с учётом произвольной ориентации оптической оси; обнаружены и классифицированы новые угловые эффекты, аналогичные эффекту Брюстера, но возникающие вследствие гиперболической дисперсии, а не из-за равенства импедансов; показано существование режимов, когда полное внутреннее отражение происходит не со стороны оптически более плотной, а со стороны оптически менее плотной среды, что является следствием

анизотропии гиперболического метаматериала.

Теоретическая значимость научного исследования заключается в обобщении классической теории Френеля на случай сред с неопределённым тензором диэлектрической проницаемости, что расширяет аппарат электродинамики сплошных сред. Практическая значимость связана с потенциальным применением результатов для проектирования новых оптических устройств, таких как гиперлинзы, преодолевающие дифракционный предел, планарные концентраторы света и высокоэффективные сенсорные платформы.

## Обзор физических свойств гиперболических метаматериалов

Гиперболические метаматериалы представляют собой уникальный класс искусственных электромагнитных сред, характеризующихся крайней анизотропией в тензоре диэлектрической проницаемости, что приводит к гиперболическим дисперсионным соотношениям, а не к эллиптической дисперсии, наблюдаемой в обычных материалах @auxrussian@auxenglish[1]. Гиперболические метаматериалы привлекли значительное внимание благодаря своей способности поддерживать распространяющиеся волны с очень большими волновыми векторами, что позволяет создавать новые оптические явления и приложения. Гиперболические метаматериалы — это одноосные анизотропные среды, в которых главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют противоположные знаки. Для одноосного материала с компонентами тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\parallel}$ (параллельными оптической оси) и $\varepsilon_{\perp}$ (перпендикулярными оптической оси) гиперболическая дисперсия возникает, когда $\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp} < 0$ [1, 2]. Это условие приводит к гиперболической изочастотной поверхности, описываемой уравнением:

$$\frac{k_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{k_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{\omega^2}{c^2} \,, \tag{1}$$

где $k_{\perp}$ и $k_{\parallel}$ – компоненты волнового вектора, перпендикулярные и параллельные оптической оси соответственно [1, 2].

Существует два основных типа гиперболической дисперсии в гиперболических метаматериалах: гиперболические метаматериалы первого типа: $\varepsilon_{\parallel} > 0$ и $\varepsilon_{\perp} < 0$, гиперболические метаматериалы второго типа: $\varepsilon_{\parallel} < 0$ и $\varepsilon_{\perp} > 0$. Гиперболическая дисперсия обеспечивает распространение волн с произвольно большими волновыми векторами, поддерживая высокодиэлектрические моды, которые являются эванесцентными в обычных материалах [2, 3].

Первый тип гиперболических метаматериалов — это однополосный гиперболический метаматериал, для которого $\mathrm{Re}(\varepsilon_{\perp}) > 0$, $\mathrm{Re}(\varepsilon_{\parallel}) < 0$, а второй тип — двухполосный гиперболический метаматериал, где $\mathrm{Re}(\varepsilon_{\perp}) < 0$, $\mathrm{Re}(\varepsilon_{\parallel}) > 0$. Для описания потерь используются модели Друде или Лоренца:

$$\varepsilon_{\alpha}(\omega) = \varepsilon_{\infty,\alpha} - \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{\omega(\omega + i\gamma_{\alpha})} \,, \quad \alpha = \perp, \parallel, \tag{2}$$

или

$$\varepsilon_{\alpha}(\omega) = \varepsilon_{\infty,\alpha} + \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{\omega_{0,\alpha}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_{\alpha}} \,. \tag{3}$$

Гиперболические метаматериалы могут быть реализованы в виде многослойных структур из чередующихся слоёв металла и диэлектрических материалов, создающих эффективную гиперболическую дисперсию, когда толщина слоя значительно меньше рабочей длины волны. К распространенным комбинациям материалов относятся нано-

композиты $Ag/TiO_2$, $Au/Al_2O_3$ и Ag/Si [3, 4]. Компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости задаются формулой:

$$\varepsilon_{\parallel} = f\varepsilon_m + (1-f)\varepsilon_d \,, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{f\varepsilon_d + (1-f)\varepsilon_m} \,, \tag{5}$$

где $f$ – доля заполнения металлом, а $\varepsilon_m$ и $\varepsilon_d$ – диэлектрические проницаемости металла и диэлектрика соответственно [3].

Гиперболические метаматериалы могут быть реализованы в виде массивов нанопроводов из вертикально ориентированных металлических нанопроводов, внедрённых в диэлектрическую матрицу, которые обладают гиперболическими свойствами. Диаметр и расстояние между нанопроводами должны быть меньше длины волны для достижения эффективного поведения среды [2, 4].

Гиперболические метаматериалы могут быть реализованы в виде переходных гиперболических метаматериалов с использованием полупроводников, таких как InAsSb, где гиперболические свойства могут динамически контролироваться [5].

Наиболее отличительной особенностью гиперболических метаматериалов является их способность поддерживать распространяющиеся волны с очень большими волновыми векторами (волны с высоким $k$), которые обычно являются эванесцентными в обычных материалах [1, 2]. Это позволяет получать изображения с субволновой длиной волны и фокусироваться за пределами дифракционного предела.

Гиперболические метаматериалы демонстрируют расходящуюся фотонную плотность состояний из-за неограниченного характера их изочастотной поверхности. Это приводит к увеличению скорости спонтанного излучения и факторов Пурселла для квантовых излучателей, расположенных вблизи гиперболических метаматериалов [2, 3].

В зависимости от ориентации и типа гиперболической дисперсии, гиперболические метаматериалы могут демонстрировать отрицательное преломление, при котором падающие и преломленные волны лежат по одну сторону от нормали [1, 4].

На малых масштабах длины излучения, сопоставимых с размером элементарной ячейки, нелокальные эффекты становятся значительными в гиперболических метаматериалах. Эти эффекты регуляризуют теоретически бесконечную плотность состояний и изменяют оптический отклик [6].

Гиперболические метаматериалы позволяют разрабатывать гиперлинзы, способные разрешать объекты меньше дифракционного предела. Преобразуя эванесцентные волны в распространяющиеся волны, гиперлинзы на основе гиперболических метаматериалов могут достигать субволнового разрешения в дальней зоне [2, 4, 7].

Усиленная плотность фотонных состояний в гиперболических метаматериалах приводит к применению в усиленном спонтанном излучении и флуоресценции, источниках одиночных фотонов, обработке квантовой информации, усилении нелинейной оптики [2, 3, 8].

Современные гиперболические метаматериалы обеспечивают повышенную чувствительность для биосенсорных приложений благодаря их способности концентрировать электромагнитные поля в субволновых масштабах. Это позволяет обнаруживать мельчайшие количества биологических молекул [2, 4].

Гиперболические метаматериалы могут изменять радиационный теплообмен в ближнем поле, что позволяет использовать их в системах теплоотведения, сбора энергии и термофотовольтаике [1, 3].

Волноводы из гиперболических метаматериалов поддерживают сильно локализованные моды с низкими потерями на распространение, что делает их привлекательными для интегрированных фотонных схем и оптических межсоединений на кристалле [7].

Исследования сосредоточены на разработке активных гиперболических метаматериалов, свойства которых можно динамически настраивать с помощью внешних воздействий, таких как электрические поля, оптическая накачка или изменения температуры [9]. В статье [9] было показано, что гиперболические метаматериалы с компенсацией потерь, включающие усиливающие среды, позволяют преодолеть внутренние потери поглощения.

Нелинейные гиперболические метаматериалы и структуры из метаматериалов демонстрируют усиленные нелинейные оптические отклики благодаря усилению поля и модифицированным условиям фазового согласования, что позволяет использовать их в преобразовании частоты и полностью оптической обработке сигналов [1, 8].

Переход от эллиптической к гиперболической дисперсии представляет собой топологическое изменение на изочастотной поверхности, приводящее к резким изменениям оптических свойств, которые можно использовать для создания новых устройств [7].

Ключевые проблемы включают минимизацию оптических потерь, достижение широкополосной работы и масштабирование процессов изготовления для практических применений. Нелокальные эффекты и пространственная дисперсия также должны быть тщательно учтены при проектировании [6].

Гиперболические метаматериалы — это материалы, в которых по крайней мере одна главная диэлектрическая постоянная отрицательна. В статье [10] описывается поверхность показателя преломления и результирующие эффекты преломления для двуосного гиперболического метаматериала с главными диэлектрическими постоянными $\varepsilon_1 < 0$, $0 < \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$. В этом общем случае два слоя поверхности показателя преломления пересекаются, образуя конические сингулярности. В статье [10] выводится лучевое описание конического преломления в этих материалах и показываем, что оно топологически и количественно отличается от конического преломления в обычном двуосном материале. В статье [10] также разрабатывается описание волновой оптики, которое позволяет получать дифракционные картины, образующиеся от произвольных пучков, падающих близко к оптической оси. В статье [10] показано, что полученные картины не обладают круговой симметрией и, следовательно, качественно отличаются от картин, полученных в обычных материалах с положительным показателем преломления.

В статье [11] сообщается о результатах разработки и экспериментальной характеристике широкополосного акустического гиперболического метаматериала. В статье [11] предложенный метаматериал состоит из множества массивов зажатых тонких пластин, обращённых в направлении $y$, и, как показано, обеспечивает противоположные знаки эффективной плотности в направлениях $x$ и $y$ ниже определённой частоты отсечки, что приводит к гиперболической дисперсии. Экспериментально продемонстрированы частичная фокусировка и субволновое изображение на частотах от 1.0 кГц до 2.5 кГц. Предложенный метаматериал может открыть новые возможности для управления акустическими волнами и может найти применение в медицинской визуализации и неразрушающем контроле.

Взаимодействие света и материи в наномасштабе в режиме слабой связи было достигнуто с помощью уникальных гиперболических метаматериальных мод, обладающих высокой плотностью состояний. В статье [12] демонстрируется сильная связь между межподзонными переходами многослойной квантово-ямочной пластины и объёмными поляритонными модами гиперболического метаматериала. Эти гиперболические метаматериальные моды имеют большие волновые векторы (моды с высоким $k$-значением) и обычно эванесцентны в обычных материалах. В статье [12] анализируется практическая многослойная гиперболическая метаматериальная структура металл-диэлектрик, состоящая из сильно легированного полупроводника, выступающего в качестве металлического слоя, и активной многослойной квантово-ямочной диэлектрической пласти-

ны. В статье [12] наблюдается делокализованное взаимодействие мод метаматериала с активными материалами, распределенными по всей структуре. В статье [12] предсказывается сильная связь и характерное антипересечение с максимальной энергией расщепления Раби до 52 мэВ между модой с высоким $k$-значением гиперболического метаматериала и межподзонным переходом, что примерно в 10.5 раз больше ширины линии межподзонного перехода и в 4.5 раза больше потерь материала структуры. Масштабируемость и возможность регулирования энергии расщепления Раби в активном полупроводниковом метаматериальном устройстве открывают потенциальные возможности применения в инфракрасных фотодетекторах на основе квантовых ям и межподзонных светоизлучающих устройствах.

В статье [13] предложен новый физический механизм проектирования квантовых гиперболических метаматериалов с использованием полупроводниковых брэгговских зеркал, содержащих периодически расположенные квантовые ямы. Гиперболическая дисперсия экситон-поляритонных мод реализуется вблизи вершины первой разрешённой фотонной минизоны в такой структуре, что приводит к образованию экситон-поляритонных волн. Экситон-световая связь обеспечивает резонансную нелинейность, которая приводит к нетривиальным топологическим решениям. В статье [13] предсказывается образование пространственно локализованных осцилляционных структур низкой амплитуды: осциллонов, описываемых решениями в форме излома эффективного уравнения Гинзбурга-Ландау-Хиггса. Эти осциллоны имеют прямые аналогии в теории гравитации. В статье [13] обсуждается применение экситон-поляритонных полей Хиггса для генерации состояния кота Шрёдингера.

Ограничение распространения света на субволновом уровне в нелинейных гиперболических метаматериалах за счёт образования пространственных солитонов в последнее время привлекает большое внимание из-за своего, казалось бы, неинтуитивного поведения. Для достижения самофокусировки в гиперболической проволочной среде необходимо использовать нелинейную самодефокусирующую среду Керра в качестве диэлектрической основы. В статье [14] демонстрируется, что это поведение находит естественное объяснение в терминах аналога гравитации. Волновое уравнение, описывающее распространение необычного света внутри гиперболических метаматериалов, демонстрирует $(2+1)$-мерную симметрию Лоренца. Роль времени в соответствующем эффективном трёхмерном пространстве-времени Минковского играет пространственная координата, выровненная с оптической осью метаматериала. Нелинейный оптический эффект Керра «искривляет» это пространство-время, что приводит к эффективной гравитационной силе между необычными фотонами. Для того чтобы эффективная гравитационная постоянная была положительной, необходимо использовать отрицательную самодефокусирующую среду Керра в качестве основы. Если гравитационное самовзаимодействие достаточно сильное, пространственный солитон может коллапсировать в аналог чёрной дыры.

Оптические силы представляют собой фундаментальное явление, важное в различных областях науки, от астрономии до биологии. Как правило, для достижения измеримых эффектов, пригодных для практического применения, требуются интенсивные внешние источники излучения. В статье [15] демонстрируется, что квантовые излучатели, помещенные в однородную анизотропную среду, индуцируют собственные крутящие моменты, выравниваясь в чётко определённом направлении, заданном анизотропией, с целью максимизации эффективности излучения. В статье [15] разрабатывается универсальная квантовомеханическая теория самоиндуцированных крутящих моментов, действующих на излучатель, помещенный в материальную среду. В статье [15] теоретическая основа базируется на подходе реакции излучения с использованием строгой локальной квантизации Ланжевена электромагнитных возбуждений. В статье [15] по-

казано увеличение собственного крутящего момента более чем на два порядка в анизотропном метаматериале с гиперболической дисперсией, имеющем отрицательное отношение компонент тензора диэлектрической проницаемости, по сравнению с обычными анизотропными кристаллами с наивысшей доступной в природе анизотропией.

В статье [16] исследуется сила Казимира между двумя гиперболическими метаматериалами, построенными из чередующихся слоёв металл-диэлектрик. Благодаря наличию гиперболической дисперсии электромагнитный отклик гиперболических метаматериалов становится чрезвычайно резким, что проявляется в почти полном отражении в этом частотном диапазоне. В результате сила Казимира между гиперболическими метаматериалами значительно больше, чем между обычными диэлектриками. Кроме того, в статье [16] показано, что сила Казимира пропорциональна ширине полосы пропускания этой гиперболической дисперсии, которая зависит от коэффициента заполнения, а также от характеристических частот составляющих материалов. Поэтому обсуждаются соотношения между силой и этими параметрами. В статье [16] показано, что силу Казимира можно контролировать, регулируя ширину полосы пропускания, обладающей гиперболической дисперсией структур. Работа [16] открывает перспективные возможности применения гиперболических метаматериалов в микроэлектромеханических и наноэлектромеханических системах.

Управление механическим движением наночастиц является ценной функцией, востребованной в различных междисциплинарных приложениях, например, в биофизике, и обычно достигается с помощью оптических сил. В статье [17] показано, что гиперболические метаматериалы позволяют настраивать и усиливать электромагнитное рассеяние и, как следствие, предоставляют платформу для нового типа оптических манипуляций. В статье [17] были предсказаны и проанализированы оптические силы притяжения, действующие на небольшую частицу, помещенную внутрь пластины из гиперболического метаматериала. Для притяжения частиц к источнику света возбуждались сильно локализованные необычные моды гиперболического метаматериала посредством рассеяния от дефекта, расположенного на границе раздела пластины. Этот тип структурированного освещения в сочетании с замечательными свойствами рассеяния, вдохновлёнными гиперболической дисперсией в метаматериале, создаёт оптическое притяжение. В статье [17] были исследованы силы, действующие на диэлектрические частицы с высоким и низким показателем преломления, а также на золотые частицы, и было показано, что эффект притяжения возникает во всех случаях. Возможность управлять механическим движением в наномасштабе с помощью вспомогательных фотонных структур открывает путь к исследованию различных явлений, например, биохимических реакций, молекулярной динамики и многого другого.

Динамика излучения оптических излучателей может управляться путём правильного проектирования материальных структур, изменяющих локальную плотность фотонных состояний, — явление, часто называемое эффектом Пурселла. Считается, что плазмонные наностержневые метаматериалы с гиперболической дисперсией электромагнитных мод обеспечивают значительное усиление эффекта Пурселла как в широкополосном, так и в нерезонансном режимах. В статье [18] исследованы резонаторы конечного размера, образованные наностержневыми метаматериалами, и показали, что основной механизм эффекта Пурселла в таких резонаторах обусловлен поддерживаемыми гиперболическими модами, которые возникают из взаимодействующих цилиндрических поверхностных плазмонных мод конечного числа наностержней, образующих резонатор. Факторы Пурселла, создаваемые этими модами резонатора, достигают нескольких сотен, что до 5 раз больше, чем в режиме $\epsilon$-близкого к нулю. В статье [18] показано, что в то время как фактор Пурселла, создаваемый модами Фабри-Перо, зависит от размера резонатора, скорость затухания в режиме $\epsilon$-близкого к нулю практически не за-

висит от геометрии. В статье [18] представленный анализ демонстрирует возможность управления эмиссионными свойствами структурированных метаматериалов с учётом их внутреннего состава.

В последнее время большое внимание уделяется возможности достижения односторонней, невосприимчивой к обратному рассеянию передачи света путём имитации топологических свойств некоторых твердотельных систем, таких как топологические изоляторы. Однако до сих пор демонстрации нетривиальной топологии в фотонике основывались на фотонных кристаллах с точно спроектированными решётчатыми структурами, периодическими в масштабе рабочей длины волны и состоящими из тонко настроенных сложных материалов. В статье [19] предложен новый подход с использованием эффективной среды для достижения топологически защищенных фотонных поверхностных состояний, устойчивых к беспорядку во всех масштабах длин и для широкого диапазона параметров материала. Примечательно, что нетривиальная топология нашей метаматериальной конструкции является результатом кривизны Берри, возникающей из-за поперечности электромагнитных волн в однородной среде. Таким образом, в статье [19] результаты исследования помогают преодолеть разрыв между развивающейся областью топологической зонной теории и классическими оптическими явлениями, такими как спиновый эффект Холла света. Путь эффективной среды к топологическим фазам откроет путь к высококомпактной односторонней передаче электромагнитных волн в интегрированных фотонных схемах.

В статье [20] изучается теплообмен в ближнем поле между гиперболическими материалами и демонстрируем, что эти среды способны поддерживать широкополосные фрустрированные моды, которые переносят тепло посредством фотонного туннелирования с высокой эффективностью, близкой к теоретическому пределу. В статье [20] предсказывается, что гиперболические материалы могут быть спроектированы как идеальные тепловые излучатели в наномасштабе, и выводим верхний предел для теплового потока, обусловленного гиперболическими модами.

Гиперболические метаматериалы поддерживают распространение волн с произвольно большими волновыми векторами в широком спектральном диапазоне и обладают уникальной ценностью для управления радиационным тепловым переносом в ближнем поле. В статье [21], используя рациональный подход к проектированию, основанный на локальной электромагнитной плотности состояний, демонстрируется способность гиперболических метаматериалов существенно выпрямлять радиационный тепловой поток. В статье [21] идея заключается в создании сценария с прямым смещением, в котором два вывода теплового диода на основе гиперболических метаматериалов имеют перекрывающиеся гиперболические полосы, что приводит к большому тепловому потоку, и подавлении обратного теплового потока путём создания спектрально несовпадающей плотности состояний при изменении температурного смещения. В качестве примера в статье [21] представлены несколько высокоэффективных тепловых диодов, созданных путём объединения гиперболических метаматериалов, изготовленных из полярных диэлектриков и материалов с переходом металл-изолятор, в виде периодических массивов нанопроволок, и рассматриваем три репрезентативных типа подложек. В статье [21] после оптимизации теоретически достигаем коэффициента выпрямления 324 при зазоре 100 нм, который остается выше 148 для больших размеров зазора до 1 мкм в широком диапазоне температур. Максимальное выпрямление представляет собой почти 1000-кратное увеличение по сравнению с объемным диодом, использующим те же материалы, и вдвое превышает показатели современных конструкций. В статье [21] подчёркивается потенциал гиперболических метаматериалов для выпрямления радиационного теплового потока и может найти применение в передовых системах терморегулирования и преобразования энергии.

В статье [22] теоретически исследуется резкое усиление спонтанного излучения в метаматериалах с гиперболической дисперсией, смоделированной как кубическая решётка анизотропных резонансных диполей. В статье [22] анализируется зависимость фактора Пурселла от положения источника в элементарной ячейке решётки и демонстрируем, что оптимальные положения излучателей, необходимые для достижения больших факторов Пурселла и сдвигов Лэмба, находятся в локальных максимумах поля. В статье [22] показано, что рассчитанная функция Грина имеет характерную крестообразную форму, пространственно модулированную из-за структурной дискретности. В статье [22] показано, что базовая микроскопическая теория даёт фундаментальное понимание быстро развивающейся области гиперболических метаматериалов.

В статье [23] изучается рассеяние поляритонов свободными электронами в гиперболических фотонных средах и демонстрируем, что нетрадиционная дисперсия и высокая локальная плотность состояний электромагнитных мод в композитных средах с гиперболической дисперсией могут приводить к гигантскому комптоновскому сдвигу и резкому увеличению сечения рассеяния. В статье [23] разрабатывается универсальный подход к изучению многофотонных процессов в наноструктурированных средах и выводим спектр интенсивности рассеянного излучения для реалистичных метаматериальных структур.

В статье [24] демонстрируется, что использование полевого эффекта позволяет настраивать эффективные оптические параметры слоистого гиперболического метаматериала на оптических частотах. Электрическая модуляция диэлектрической проницаемости в прозрачных проводящих оксидах осуществляется за счёт изменения плотности носителей заряда. В статье [24] показано, что эти изменения диэлектрической проницаемости приводят к активной модуляции эффективных электромагнитных параметров, а также к активному управлению анизотропной дисперсионной поверхностью гиперболических метаматериалов и позволяют открывать и закрывать фотонные запрещённые зоны. Возможность регулирования эффективной электрической диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости также приводит к топологическим переходам в характеристиках оптической дисперсии.

В статье [25] предлагаются метаматериалы для терагерцовых частот на основе многослойных графеновых структур. В статье [25] рассчитывается тензор диэлектрической проницаемости эффективной нелокальной среды с периодическим расположением графеновых слоёв и демонстрируем, что настройка от эллиптической до гиперболической дисперсии может быть достигнута с помощью внешнего управляющего напряжения. В статье [25] показано, что такие графеновые структуры могут демонстрировать гигантский эффект Пурселла, который может быть использован для усиления терагерцового излучения в полупроводниковых устройствах. Возможность настройки этих структур может быть дополнительно улучшена с помощью внешнего магнитного поля, что приводит к нетрадиционной гибридизации TE-поляризованных и TM-поляризованных волн.

В статье [26] предлагается аналитический подход к расчёту гомогенизированных диэлектрических функций $\varepsilon_{\parallel}(\omega)$ и $\varepsilon_{\perp}(\omega)$ одномерной периодической металл-диэлектрической структуры. В статье [26] показано, что полученные формулы действительны на высоких частотах вблизи точек топологического перехода из эллиптического в гиперболический режим. В статье [26] предложенный метод высокочастотной гомогенизации учитывает быстро изменяющиеся электромагнитные поля внутри металлической компоненты элементарной ячейки, в частности, эванесцентный характер плазмонной моды и осциллирующее поведение волноводоподобных мод. В статье [26] результаты показывают хорошее соответствие точному решению дисперсионного уравнения Ритова и значительное отклонение от широко используемых квазистатических формул, полученных пространственным усреднением по направлению периодичности $z$ функций $\varepsilon(z)$ и

$1/\varepsilon(z)$. Квазистатический подход игнорирует зависимость полей от $z$, что приводит к его ограниченной применимости вблизи частоты топологического перехода.

В статье [27] показано, что аксиальная компонента тензора магнитной проницаемости находится в резонансе для проволочной среды, состоящей из нанопроводов с высоким показателем преломления и положительным значением диэлектрической проницаемости, и её действительная часть меняет знак на определённой частоте. На этой частоте среда испытывает топологический фазовый переход между эллиптической и гиперболической дисперсией. В статье [27] показано, что переходный режим характеризуется чрезвычайно сильной зависимостью проницаемости от волнового вектора. Это подразумевает очень высокую плотность электромагнитных состояний, что приводит к нитевидному рисунку и заметному фактору Пурселла для поперечно ориентированного магнитного диполя.

В статье [28] встраивается гиперболический метаматериал на основе многослойных пар эпитаксиально выращенных ZnO/ZnO:Ga в монолитную оптическую микрорезонаторную структуру и экспериментально и теоретически исследуется возникающие уникальные резонансные эффекты. В отличие от традиционных металлов, полупроводниковый подход позволяет использовать все три области диэлектрической проницаемости гиперболического метаматериала в ближнем инфракрасном диапазоне спектра. В статье [28] такая конфигурация приводит к появлению мод одинакового порядка на разных частотах, резонанса нулевого порядка в области с положительной диэлектрической проницаемостью и континуума мод высокого порядка. Кроме того, в статье [28] в спектр мод резонатора вводится необычная нижняя частота отсечки. Наблюдаемые эффекты расширяют возможности для индивидуальной настройки оптических резонаторов; в частности, моды нулевого и высокого порядка обладают большим потенциалом для создания резонаторов значительно меньшего размера, чем длина волны.

В статье [29] предложена концепция гиперболических проводов, которые преодолевают существующие ограничения патч-антенн типа металл-изолятор-металл с точки зрения электромагнитной локализации и эффективности. Использование гиперболических метаматериалов позволяет создавать миниатюрные резонаторы, поддерживающие объемные плазмонные поляритоны, сжатые до одной сотой длины волны. Помимо этого десятикратного уменьшения размеров по сравнению с антеннами типа металл-изолятор-металл, в статье [29] предлагается модель, позволяющая масштабировать резонансные частоты гиперболических проводов в широком спектральном диапазоне путём контроля степени заполнения металлами и диэлектриками.

Управление распространением света с помощью искусственных фотонных кристаллов и электромагнитных метаматериалов является важной темой в динамично развивающейся области фотоники. В частности, хиральные краевые состояния на поверхности или на границе раздела фотонных изоляторов Черна могут быть использованы для создания волноводов без отражений. В статье [30], с помощью теоретического анализа и электромагнитного моделирования, демонстрируется, что гиромагнитные гиперболические метаматериалы являются фотонными изоляторами Черна с превосходными свойствами. В статье [30] показано, что одновременное возникновение гиперболического и гиромагнитного эффектов в этих метаматериалах открывает большие топологические запрещенные зоны с числом Черна, равным единице. Важно отметить, что гиромагнитные гиперболические метаматериалы-изоляторы Черна обладают нерадиационными хиральными краевыми модами на своих поверхностях, что позволяет нам изготавливать однонаправленные волноводы без металлических оболочек, которые обычно приводят к значительным омическим потерям. Кроме того, фотонные краевые состояния в предлагаемых изоляторах Черна устойчивы к нарушениям порядка в широком диапазоне масштабов длин, что резко контрастирует с кристаллическими топологическими изоля-

торами, а направление светового потока на поверхности изоляторов Черна можно легко изменить, переключив направление приложенного магнитного поля. Примечательно, что в статье [30] обнаружено отрицательное преломление топологической поверхностной волны на границе между гиромагнитными гиперболическими метаматериалами с противоположными знаками гиромагнитных параметров. Наконец, в статье [30] показано, что по сравнению с другими фотонными топологическими материалами, такими как хиральные гиперболические материалы, предлагаемые гиромагнитные гиперболические метаматериалы — изоляторы Черна — гораздо проще изготавливать.

В статье [31] представлена возможность создания резонансов Фано с использованием многослойных гиперболических метаматериалов. В статье [31] предложенные конструкции резонаторов состоят из многослойных структур с центральной наклонной частью. В статье [31] показано, что высокорегулируемые резонансы возникают в результате интерференции между распространяющейся и эванесцентной модами внутри наклонной секции. Распространяющаяся мода может достигать чрезвычайно высокого эффективного показателя преломления, что позволяет создавать резонаторы размером до 5 нм, значительно меньше длины волны. Эванесцентная мода редко анализируется, но здесь она играет важную роль, поскольку её вклад определяет конкретную форму характеристик резонатора. Более того, эти явления не могут быть описаны с помощью теории эффективной среды, и в статье [31] предлагается более строгий анализ. В статье [31] показано, что сообщаемые резонансы очень чувствительны к любым структурным изменениям и могут быть использованы в сенсорных приложениях.

В статье [6] изучаются метаматериалы, известные как гиперболические среды, которые в обычном приближении локального отклика демонстрируют гиперболическую дисперсию и связанную с ней широкополосную сингулярность в плотности состояний. Вместо этого, из более микроскопической гидродинамической теории Друде в статье [6] выводятся качественно иные оптические свойства этих метаматериалов, обусловленные нелокальным оптическим откликом свободных электронов в их металлических компонентах. В статье [6] демонстрируется, что нелокальный отклик приводит к обрезанию дисперсии при больших волновых векторах, обратно пропорциональному фермиевской скорости электронного газа, но также для малых волновых векторов обнаружены различия в гиперболической дисперсии. Более того, в статье [6] показано, что размер элементарной ячейки влияет на эффективные параметры метаматериала даже в глубоко субволновом режиме. Наконец, корости электронного газа, но также для малых волновых векторов обнаружены различия в гиперболической дисперсии. Более того, в статье [6] показано, что вместо широкополосной суперсингулярности в локальной плотности состояний предсказано большое, но конечное максимальное усиление, пропорциональное обратному кубу фермиевской скорости.

В статье [32] разрабатывается общая теоретическая модель интегрированной генерации парных фотонов и плазмонов посредством спонтанного смешивания волн в нелинейных плазмонных и метаматериальных наноструктурах, строго учитывая дисперсию материала и потери в квантовом режиме через электромагнитную функцию Грина. В статье [32] идентифицируются корреляции фотонов и плазмонов в слоистых металл-диэлектрических структурах с 70 % внутренней квантовой эффективностью детектирования и раскрываем новый механизм усиления широкополосной генерации за счёт топологического перехода в гиперболических метаматериалах.

В отличие от сильного плазмонного рассеяния от металлических частиц или структур в металлических плёнках, в статье [33] показано, что узоры произвольной формы, изготовленные из многослойных гиперболических метаматериалов, становятся невидимыми в выбранном диапазоне оптических частот. Это происходит из-за аномально слабого рассеяния, когда диэлектрическая проницаемость многослойных гиперболиче-

ских метаматериалов в плоскости настраивается таким образом, чтобы соответствовать окружающей среде. Это новое явление описано теоретически и продемонстрировано экспериментально путём оптической характеризации различных узоров в многослойных гиперболических метаматериалах Au-Si. Это аномально слабое рассеяние нечувствительно к размерам, формам и углам падения узоров и имеет потенциальные применения в проектировании сечения рассеяния, оптическом шифровании, малозаметных проводящих зондах и оптоэлектрических устройствах.

Топологические изоляторы остаются неизменными лидерами в физике конденсированных сред благодаря своим уникальным электронным свойствам. Хорошо известное соответствие между объемом и границей обеспечивает существование устойчивых краевых или интерфейсных состояний, которые защищены топологическими характеристиками зонной структуры материала. Выходя за рамки традиционно подчёркиваемых в литературе связанных краевых состояний, в статье [34] исследуется, как топологически защищенные состояния распространяются на нетривиальное излучение вдали от ограничивающих границ раздела. В статье [34] разрабатывается метаматериал, чья спроектированная гиперболическая дисперсия включает в себя как хиральную, так и зеркальную симметрию. В статье [34] обсуждается, как связанная с этим степень свободы спиновой поляризации обеспечивает излучение, невосприимчивое к дефектам, с различными настраиваемыми направленными диаграммами направленности в дальней зоне. В статье [34] эксперименты однозначно демонстрируют топологическую устойчивость акустического излучения после преднамеренного добавления поглощающих и препятствующих дефектов, что потенциально может стимулировать исследования в области передовой акустики помещений и городской акустики.

В статье [35] изучается формирование конусов двойного резонанса второй гармоники в гиперболических метаматериалах. Электрический диполь на поверхности структуры индуцирует распространение света второй гармоники в два различных канала объёмных плазмон-поляритонов: сигнал, распространяющийся внутри собственного резонансного конуса, и сигнал с фазовой синхронизацией, удерживаемый в резонансном конусе накачки. В статье [35] показано, что дисперсия и двулучепреломление метаматериала вызывают большую угловую расходимость между двумя объёмными плазмонполяритонами, что делает эти структуры пригодными для субволновой микроскопии с визуализацией второй и более высоких гармоник.

В статье [36] теоретически и численно исследуются условия спасинга и оптическую динамику композитного гиперболического метаматериала, взаимодействующего с молекулами усиления. Комбинируя уравнения Максвелла-Блоха с подходом функций Грина, рассчитывается частота лазерного излучения и пороговую инверсию населенности для различной плотности усиления в слое усиления. В статье [36] демонстрируется высокий уровень усиления фотонной плотности состояний в широком спектральном диапазоне, обеспечиваемом гиперболическими метаструктурами. В статье [36] обнаружено, что прямые диполь-дипольные взаимодействия между молекулами в слое усиления оказывают незначительное влияние на условия спасинга. С учётом этих эффектов в статье [36] определяется область параметров, в которой может происходить спасинг.

В статье [37] показано, что функциональность гиперболических метаматериалов в ближнем электромагнитном поле, обычно предлагаемая для увеличения локальной плотности фотонных состояний, может быть достигнута с помощью тонких металлических плёнок. Хотя гиперболические метаматериалы обладают бесконечной плотностью внутренне распространяющихся состояний плоских волн, внешняя связь с близлежащими излучателями сильно ограничена. В статье [37] аналитически показано, что правильно спроектированные тонкие плёнки толщиной, сопоставимой с размером металла гиперболического метаматериала, обеспечивают локальную плотность состояний, та-

кую же высокую (если не выше), как у гиперболических метаматериалов. В статье [37] иллюстрируются эти идеи, выполняя точные численные вычисления локальной плотности состояний многослойных гиперболических метаматериалов, а также их применение к задаче максимизации теплопередачи в ближнем поле, чтобы показать, что однослойные тонкие плёнки являются подходящей заменой в обоих случаях.

В статье [38] изучаются оптические свойства квантовых дипольных излучателей, связанных с гиперболическими метаматериальными нанорезонаторами, используя полуаналитический подход квазинормальных мод. В статье [38] показано, что связь с метаматериальными нанорезонаторами может приводить к значительному усилению эффекта Пурселла, почти на порядок превышающему усиление плазмонных резонаторов с сопоставимой геометрией. Однако соответствующие коэффициенты $\beta$-фактора одиночного фотона чрезвычайно низки (около 10 %), намного меньше, чем у металлических резонаторов сопоставимого размера (70 %). Используя разложение функции Грина фотона в квазинормальные моды, в статье [38] описывается, как низкие коэффициенты $\beta$-фактора обусловлены повышенным омическим гашением, возникающим из-за красного смещения резонансов, большими добротностями и более сильным ограничением света внутри металла. В статье [38] объясняются, почему гиперболические метаматериальные наноструктуры, вероятно, являются плохим выбором для источников одиночных фотонов.

В статье [39] теоретически исследуются бездисперсионные щели и моды резонатора в одномерных фотонных кристаллах, состоящих из гиперболических метаматериалов и диэлектрика. Брэгговские щели в обычных полностью диэлектрических фотонных кристаллах всегда дисперсионны, поскольку фазы распространения в двух типах диэлектриков уменьшаются с углом падения. В статье [39] на основе компенсации фазовых вариаций между слоем гиперболического метаматериала и изотропным диэлектрическим слоем, дисперсия щели может быть компенсирована, и, таким образом, может быть реализована бездисперсионная щель. Более того, бездисперсионное свойство такой щели имеет широкое параметрическое пространство. В статье [39] показано, что бездисперсионная щель может быть использована для реализации бездисперсионной моды резонатора. Бездисперсионные щели и моды резонатора будут иметь важное применение в отражателях под любым углом, высокочастотных фильтрах, возбуждаемых источниками конечного размера, и процессах нелинейного смешения волн.

Активное управление радиационным теплопереносом по-прежнему остаётся открытой проблемой из-за его захватывающего потенциала применения. В связи с этим в статье [40] представляется теоретическая демонстрация динамически регулируемого ближнеполевого радиационного теплопереноса между двумя многослойными гиперболическими метаматериалами (состоящими из чередующихся слоёв магнитооптического материала и диэлектрика) с использованием внешнего магнитного поля. В статье [40] показано, что индуцированные намагниченностью гиперболические моды играют значительную роль в радиационном теплопереносе и позволяют осуществлять высокорегулируемый тепловой поток. Более того, гибридизация собственных и индуцированных намагниченностью гиперболических мод значительно усиливает радиационный теплоперенос. В частности, в статье [40] обнаружено, что преобразование поляризации из-за ненулевых недиагональных элементов позволяет спектральному коэффициенту теплопередачи для TE-поляризации быть таким же большим, как и для TM-поляризации, что существенно отличается от случая двух близко расположенных объемных магнитооптических пластин. Кроме того, для количественной характеристики тепловой модуляции в статье [40] показано, что возникает отрицательный эффект теплового магнитосопротивления в этой системе, который приближается к $-59.6\,\%$ при интенсивности магнитного поля 10 Тл. Результаты статье [40] могут быть полезны для активного бесконтактного

управления тепловыми процессами в наномасштабе и способствовать более глубокому пониманию механизмов магнитооптических гиперболических метаматериалов с точки зрения ближнеполевого радиационного теплообмена.

В статье [41] исследуется широкополосное и всенаправленное выпрямление в среднем инфракрасном диапазоне на основе наноструктурированных гиперболических метаматериалов, состоящих из двух разнородных металлов, разделенных сверхтонким диэлектрическим слоем. В статье [41] показано, что экзотические моды замедленного света, поддерживаемые такими периодически расположенными канавками гиперболическими метаматериалами, эффективно захватывают падающее излучение в массивно параллельных туннельных переходах металл-изолятор-металл, обеспечивая сверхбыстрое выпрямление в инфракрасном диапазоне посредством фотонно-стимулированного туннелирования. Это приводит к высокоэффективному преобразованию фотонов в электроны с полученным фототоком на порядки больше, чем у обычных устройств с сосредоточенными параметрами, таких как наноректенны и точечные контактные выпрямители. В статье [41] результаты обещают оказать влияние на устройства сбора инфракрасной энергии и плазмонные фотодетекторы.

В статье [42] показано, что гиперболические метаматериалы, реализованные в виде многослойных структур на основе двух материальных составляющих, расположенных в соответствии с апериодической последовательностью Туэ–Морса, могут проявлять сильные нелокальные эффекты, проявляющиеся в виде появления дополнительных экстраординарных волн, которые не предсказываются стандартными моделями теории эффективной среды (локальными моделями). С математической точки зрения, эти эффекты могут быть связаны со стационарными точками следа матрицы переноса и могут быть эффективно параметризованы с помощью формализма отображения следа. В статье [42] показано, что их возникновение сопровождается сильной зависимостью эффективных конститутивных параметров от волнового вектора. Несмотря на присущую периодичность, обеспечиваемую неизбежными (блоховского типа) окончаниями суперъячеек, в статье [42] показано, что такая сильная нелокальность сохраняется на любой произвольно высокой итерации, то есть приближаясь к фактическому апериодическому режиму. Более того, для определённых конфигураций параметров, при заданной длине волны и для двух заданных материальных слоёв, эти эффекты могут быть значительно менее выраженными, когда те же слои расположены стандартным периодическим образом. В статье [42] показано, что (апериодический) позиционный порядок слоёв представляет собой эффективную и технологически недорогую дополнительную степень свободы при проектировании оптической нелокальности.

Гиперболические метаматериалы, необычный класс электромагнитных метаматериалов, нашли важное применение в различных областях благодаря своим уникальным свойствам. Удивительной особенностью гиперболических метаматериалов является то, что даже непрерывные гиперболические метаматериалы могут обладать топологическими краевыми модами. Однако предыдущие исследования, основанные на поверхности равной частоты (аналогия поверхности Ферми), могут неточно описывать топологию целых зон. В статье [43] разрабатывается топологическое описание зон для непрерывных гиперболических метаматериалов, которое может быть описано неэрмитовым гамильтонианом, сформулированным из уравнений Максвелла. В статье [43] обнаружены два типа трёхмерных неэрмитовых тройно вырожденных точек со сложными линейными дисперсиями и топологическими зарядами $\pm 2$ и 0, индуцированными хиральными и гиромагнитными эффектами. Из-за фотонной природы вакуумная зона играет важную роль в топологических краевых состояниях и соответствии между объёмом и краем в гиперболических метаматериалах. Результаты топологического описания зон численно подтверждаются прямым моделированием уравнений Максвелла. В

статье [43] представлен общий неэрмитовский топологический зонный подход к непрерывным гиперболическим метаматериалам, открывающий путь к исследованию интересных топологических фаз в фотонных континуумах и реализации топологических гиперболических метаматериалов в устройствах.

В статье [44] показано, что система из двух взаимодействующих гиперболических метаматериалов может быть использована для прямой субволновой визуализации в видимом диапазоне. В статье [44] предложенная конфигурация состоит из двух анизотропных фотонных кристаллов: многослойной металл-диэлектрической структуры и соединенной с ней проводящей структуры. В статье [44] результаты аналитических расчётов и численного моделирования показывают, что свет, излучаемый диполем, расположенным на вершине многослойной структуры, распространяется в узком конусе вдоль направления $\mathbf{n}$, где $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega, \mathbf{n}) = 0$. Благодаря согласованию импедансов и отрицательному преломлению на границе раздела, в проводящей структуре фокусируется яркое изображение с максимальным поперечным размером приблизительно 50 нм на длине волны $\lambda = 650$ нм.

В статье [45] выражаются оптические свойства многослойных гиперболических метаматериалов через коэффициенты отражения Френеля на границе между метаматериалом и окружающей средой. Демонстрируется формирование полосы объёмных распространяющихся мод в гиперболических метаматериалах, расположенных далеко за пределами светового конуса однородных изотропных сред. В статье [45] воспроизводится экзотическое поведение гиперболических метаматериалов, такое как широкополосный эффект Пурселла и подавленное рассеяние наружу. Выводятся условия, при которых многослойная структура металл-диэлектрик может быть аппроксимирована однородной эффективной средой с экстремальной анизотропией (неопределенной средой). В статье [45] показано, что реальные многослойные гиперболические метаматериалы обычно имеют меньший фактор Пурселла, чем соответствующая эффективная среда; однако в статье [45] показано, что возможен и обратный сценарий благодаря промежуточной роли короткодействующих поверхностных плазмонных возбуждений во внешнем металлическом слое в многослойной структуре металл-диэлектрик.

В статье [46] показано, что гиперболические метаматериалы, демонстрирующие гиперболические диаграммы дисперсии волнового вектора, обладают двумя важными особенностями, связанными со сверхпоглощением: полная мощность, рассеянная наносферой, значительно увеличивается при размещении на поверхности гиперболического метаматериала по сравнению с поверхностями других материалов, и почти полностью направляется внутрь гиперболического метаматериала. В статье [46] показано, что эти две особенности характерны для интерфейсов гиперболических метаматериалов, и подтверждаем их с помощью исследования поперечно-электрических и магнитных волн, рассеянных субволновой наносферой, на основе спектральной теории. В статье [46] анализируется мощность рассеяния наносферы, поглощаемую различными конфигурациями подложки. В статье [46] также рассматриваются различные материалы наносфер.

В обычных одномерных фотонных кристаллах, полностью состоящих из диэлектриков, фотонные щели смещаются в сторону коротких длин волн (синий сдвиг) по мере увеличения угла падения как для поперечной магнитной, так и для поперечной электрической поляризации. Теоретически и экспериментально в статье [47] достигается красное смещение щелей в одномерных фотонных кристаллах, фотонных щелей, состоящих из альтернативных гиперболических метаматериалов и диэлектриков для поперечной магнитной поляризации, основанных на аномальной дисперсии волнового вектора гиперболических метаматериалов. В статье [47] гиперболический метаматериал имитируется слоистым диоксидом титана и серебром с субволновой элементарной ячейкой. Однако щели остаются смещенными в синюю сторону для поперечной электрической

поляризации. Поэтому края таких щелей могут быть использованы для высокоэффективного широкоугольного отбора поляризации. В статье [47] достигается эффективный отбор поляризации для углов падения от 50° до 80° на длине волны 365 нм.

## Теоретическая модель гиперболических метаматериалов на основе уравнений Максвелла

Современная нанофотоника сталкивается с фундаментальным ограничением дифракционного предела, не позволяющим фокусировать свет в объем менее $\lambda^3/2$, где $\lambda$ – длина волны излучения. Это ограничение, как известно, является следствием эллиптического характера изофер поверхности волновых векторов в обычных диэлектриках. Однако в 2007 году было теоретически предсказано и экспериментально подтверждено существование так называемых гиперболических метаматериалов — анизотропных сред, в которых тензор диэлектрической проницаемости имеет компоненты противоположных знаков [22, 48, 49].

Гиперболические метаматериалы характеризуются анизотропным тензором диэлектрической проницаемости, компоненты которого имеют противоположные знаки, что приводит к открытию гиперболической изочастотной поверхности и поддержанию распространения волн с большими волновыми векторами. Физическая природа гиперболических метаматериалов заключается в искусственно созданной анизотропии, когда одна из диагональных компонент тензора $\hat{\varepsilon}$ отрицательна, а две другие положительны. Это приводит к качественному изменению дисперсионных соотношений: изофер поверхности волновых векторов приобретает гиперболический вид, что теоретически позволяет распространяться электромагнитным волнам с произвольно большими волновыми числами $k$ [50].

В настоящей работе развивается электродинамическая теория гиперболических метаматериалов, учитывающую пространственную дисперсию и диссипацию. Основное внимание уделяется получению аналитических выражений для ключевых характеристик метаматериала и их численной проверке в частотной области. Рассмотрим однородную анизотропную среду с диэлектрической проницаемостью, описываемой тензором второго ранга:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Для одноосного кристалла, ось которого направлена вдоль оси $z$, тензор проницаемости имеет вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\varepsilon_{\perp}$ и $\varepsilon_{\parallel}$ – компоненты, перпендикулярная и параллельная оптической оси соответственно. Среда является гиперболической, если выполняется условие:

$$\mathrm{Re}(\varepsilon_{\perp}) \cdot \{Re(\varepsilon_{\parallel}) < 0. \tag{8}$$

В этом случае изочастотная поверхность, описывающая разрешённые волновые векторы $\mathbf{k}$ для данной частоты $\omega$, принимает форму гиперболоида, а не эллипсода, как в обычных анизотропных кристаллах. Это фундаментальное отличие открывает путь к поддержанию высоко-$k$ мод, то есть волн с очень большими поперечными волновыми числами, которые в обычных материалах являются затухающими.

Уравнения Максвелла в такой среде при отсутствии свободных электрических зарядов и токов принимают вид:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \,, \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \,, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot (\hat{\varepsilon}\mathbf{E}) = 0 \,, \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \,. \tag{12}$$

Для монохроматических волн с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$ уравнения (9)-(10) переходят в:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \tag{13}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} \tag{14}$$

Подставляя (13) в ротор (14), получаем волновое уравнение для электрического поля:

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = \omega^2 \mu_0 \hat{\varepsilon} \mathbf{E} \,. \tag{15}$$

Используя векторное тождество $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ и учитывая (11), получаем:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = 0 \,. \tag{16}$$

Для плоской волны $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ уравнение (16) приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left[k^2 \mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}^T - \omega^2 \mu_0 \hat{\varepsilon}\right] \mathbf{E}_0 = 0 \,. \tag{17}$$

Условие нетривиального решения определяет дисперсионное соотношение:

$$\det \left[k^2 \mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}^T - \omega^2 \mu_0 \hat{\varepsilon}\right] = 0 \,. \tag{18}$$

Для простейшего случая одноосной анизотропии, когда $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_\parallel$, дисперсионное соотношение (18) распадается на два независимых уравнения для TE- и TM-поляризаций. Для TM-волн ($H_z \neq 0$) получаем:

$$\frac{k_\rho^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{k_z^2}{\varepsilon_\perp} = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{19}$$

где $k_\rho^2 = k_x^2 + k_y^2$, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ — скорость света в вакууме. В случае гиперболического метаматериала $\varepsilon_\parallel < 0$ и $\varepsilon_\perp > 0$, что приводит к гиперболическому виду изоферной поверхности:

$$\frac{k_\rho^2}{|\varepsilon_\parallel|} - \frac{k_z^2}{\varepsilon_\perp} = -\frac{\omega^2}{c^2} \tag{20}$$

## Модель эффективной среды для описания гиперболических метаматериалов

Для описания гиперболических метаматериалов используем модель эффективной среды, рассматривая периодическую структуру как однородную анизотропную среду. Рассмотрим метаматериал, представляющий собой периодический набор металлических наностержней, встроенных в диэлектрическую матрицу. Эффективная диэлектрическая проницаемость определяется по формуле Максвелл–Гарнетта с учётом формы включений:

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_d \frac{\varepsilon_m (1+f) + \varepsilon_d (1-f)}{\varepsilon_m (1-f) + \varepsilon_d (1+f)} \,, \tag{21}$$

где $\varepsilon_m$ и $\varepsilon_d$ – проницаемости металла и диэлектрика соответственно, $f$ – доля металла.

Для анизотропной структуры компоненты тензора $\hat{\varepsilon}$ имеют вид:

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon_d \frac{(1+f)\varepsilon_m + (1-f)\varepsilon_d}{(1-f)\varepsilon_m + (1+f)\varepsilon_d} \tag{22}$$

$$\varepsilon_\parallel = f\varepsilon_m + (1-f)\varepsilon_d \tag{23}$$

Реальные металлы характеризуются значительными потерями, которые описываются мнимой частью диэлектрической проницаемости. Используем модель Друде для металлической компоненты:

$$\varepsilon_m(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \tag{24}$$

где $\omega_p$ – плазменная частота, $\gamma$ – частота столкновений.

Пространственная дисперсия учитывается через введение зависимости от волнового числа:

$$\varepsilon\left(\omega, k\right) = \varepsilon\left(\omega\right) + \beta k^2 \ , \tag{25}$$

где $\beta$ – параметр нелокальности, связанный с размером элементарной ячейки метаматериала.

Одним из ключевых параметров, определяющих оптические свойства гиперболических метаматериалов, является плотность фотонных состояний. Для анизотропной среды плотность фотонных состояний определяется как:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta\left(\omega - \omega\left(\mathbf{k}\right)\right) d^3k \ . \tag{26}$$

Для гиперболической дисперсии (20) интеграл (26) берется по области, ограниченной гиперболоидом. Переходя к сферическим координатам в пространстве волновых векторов, получаем:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty k_\rho dk_\rho \int_{-\infty}^\infty dk_z \delta\left(\omega - c\sqrt{\frac{k_\rho^2}{|\varepsilon_\parallel|} - \frac{k_z^2}{\varepsilon_\perp}}\right) \ . \tag{27}$$

После интегрирования получаем следующее выражение:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3} \sqrt{|\varepsilon_\parallel|\varepsilon_\perp} \left(\ln\left(\frac{k_{\max}}{k_{\min}}\right) + \frac{1}{2}\right) \ , \tag{28}$$

где $k_{\max}$ и $k_{\min}$ – верхний и нижний пределы волновых чисел, определяемые размером элементарной ячейки и условиями квантования.

Характерной особенностью гиперболических метаматериалов является существование высоко-$k$ мод, которые испытывают сильное затухание в направлении перпендикулярно оптической оси. Длина проникновения таких мод определяется как:

$$L_p = \frac{1}{\mathrm{Im}(k_z)} = \frac{2c}{\omega\sqrt{\varepsilon_\perp}} \ . \tag{29}$$

Усиление электрического поля вблизи поверхности гиперболических метаматериалов может быть оценено по формуле:

$$\eta = \left|\frac{E_{\text{GMM}}}{E_0}\right|^2 = \frac{4|\varepsilon_\parallel|}{(\mathrm{Re}(\sqrt{\varepsilon_\parallel}) + \sqrt{\varepsilon_\perp})^2 + \mathrm{Im}(\sqrt{\varepsilon_\parallel})^2} \ . \tag{30}$$

При $\mathrm{Im}(\varepsilon_\parallel) \to 0$ усиление стремится к:

$$\eta_{\max} = \frac{4|\varepsilon_\parallel|}{(\sqrt{|\varepsilon_\parallel|} + \sqrt{\varepsilon_\perp})^2} \ . \tag{31}$$

Групповая скорость электромагнитной волны в анизотропной среде определяется следующим выражением:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega(\mathbf{k}) = \frac{c^2}{\omega}\left(\frac{k_x}{|\varepsilon_\parallel|}\hat{\mathbf{x}} + \frac{k_y}{|\varepsilon_\parallel|}\hat{\mathbf{y}} - \frac{k_z}{\varepsilon_\perp}\hat{\mathbf{z}}\right) \ . \tag{32}$$

Вектор Умова–Пойнтинга, характеризующий энергетический поток, имеет следующий вид:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2\omega\mu_0}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*)\right) \ . \tag{33}$$

Для TM-волн в гиперболических метаматериалах:

$$\mathbf{S} = \frac{|E_0|^2}{2\omega\mu_0}\left(\frac{k_x}{|\varepsilon_\parallel|}\hat{\mathbf{x}} + \frac{k_y}{|\varepsilon_\parallel|}\hat{\mathbf{y}} - \frac{k_z}{\varepsilon_\perp}\hat{\mathbf{z}}\right) \ . \tag{34}$$

Сравнивая (32) и (34), видим, что вектор Умова–Пойнтинга параллелен групповой скорости, что является следствием сохранения энергии.

## Теоретическая модель отражения и пропускания на плоской границе раздела с гиперболическим метаматериалом

Рассмотрим плоскую границу раздела $z = 0$ между вакуумом ($z < 0$) и полубесконечным гиперболическим метаматериалом ($z > 0$). На границу падает плоская монохроматическая волна с частотой $\omega$ и волновым вектором $\mathbf{k}_i$, лежащим в плоскости $x - z$. Угол падения обозначим $\theta_i$. Без потери общности, оптическая ось гиперболического метаматериала лежит в плоскости падения и составляет угол $\phi$ с осью $z$. Тогда тензор диэлектрической проницаемости в лабораторной системе координат получается преобразованием вращения:

$$\hat{\varepsilon}' = R\,(\phi)\,\hat{\varepsilon}R^{-1}\,(\phi) \ , \tag{35}$$

где $R\,(\phi)$ – матрица поворота вокруг оси $y$.

Волновое уравнение для монохроматического поля $\mathbf{E}\,(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}\,(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}$ в анизотропной среде без источников имеет вид:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2\hat{\varepsilon}'\mathbf{E} = 0 \ , \tag{36}$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме. Будем искать решение для прошедшей в гиперболическом метаматериале волны в виде плоской волны:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_t^0 e^{i\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r}}, \tag{37}$$

где $\mathbf{k}_t = (k_x, 0, k_z)$ – волновой вектор в гиперболическом метаматериале. Из условий непрерывности на границе следует сохранение тангенциальной компоненты волнового вектора:

$$k_x = k_0 \sin\theta_i \ . \tag{38}$$

Подстановка (36) в (35) даёт систему однородных уравнений:

$$[\mathbf{k}_t \times [\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t^0]] + k_0^2\hat{\varepsilon}'\mathbf{E}_t^0 = 0 \ . \tag{39}$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получаем:

$$\mathbf{k}_t \left(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{E}_t^0\right) - k_t^2 \mathbf{E}_t^0 + k_0^2 \hat{\varepsilon}' \mathbf{E}_t^0 = 0 \, . \tag{40}$$

Это система трёх уравнений относительно компонент вектора $\mathbf{E}_t^0$. Условием её разрешимости является равенство нулю детерминанта:

$$\det \left[k_\alpha k_\beta - k_t^2 \delta_{\alpha\beta} + k_0^2 \varepsilon'_{\alpha\beta}\right] = 0 \, . \tag{41}$$

Это уравнение определяет связь между $k_x$ и $k_z$, то есть дисперсионное соотношение для волн в гиперболических метаматериалах. Для случая, когда оптическая ось лежит в плоскости падения ($\phi \neq 0, \pi/2$), уравнение (40) распадается на два независимых уравнения для обыкновенной и необыкновенной волн. Однако в гиперболических метаматериалах эти моды сильно связаны.

Рассмотрим для простоты случай $\phi = 0$ (оптическая ось параллельна $z$). Тогда тензор $\hat{\varepsilon}'$ диагонален. В этом случае система (39) распадается. Для $s$-поляризации (перпендикулярной, $E_y \neq 0$) электрическое поле перпендикулярно плоскости падения и оптической оси. Уравнение для $y$-компоненты даёт:

$$-k_t^2 E_y + k_0^2 \varepsilon_\perp E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2 \varepsilon_\perp \, . \tag{42}$$

Это стандартное дисперсионное соотношение для обыкновенной волны. Для $p$-поляризации (параллельной, $E_x, E_z \neq 0$) получаем систему:

$$(-k_z^2 + k_0^2 \varepsilon_\perp) E_x + (k_x k_z) E_z = 0 \, , \tag{43}$$

$$(k_x k_z) E_x + (-k_x^2 + k_0^2 \varepsilon_\parallel) E_z = 0 \, . \tag{44}$$

Приравнивая детерминант к нулю, получаем дисперсионное соотношение для необыкновенной волны:

$$\frac{k_x^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{k_z^2}{\varepsilon_\perp} = k_0^2 \, . \tag{45}$$

Именно уравнение (43) описывает гиперболическую дисперсию. Действительно, если $\varepsilon_\perp > 0$ и $\varepsilon_\parallel < 0$ (гиперболические метаматериалы первого типа), то (43) принимает вид:

$$\frac{k_x^2}{|\varepsilon_\parallel|} - \frac{k_z^2}{\varepsilon_\perp} = k_0^2 \, , \tag{46}$$

что является уравнением гиперболы в $(k_x, k_z)$-пространстве. Если $\varepsilon_\perp < 0$ и $\varepsilon_\parallel > 0$ (гиперболические метаматериалы второго типа), то:

$$-\frac{k_x^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{k_z^2}{|\varepsilon_\perp|} = k_0^2 . \tag{47}$$

Из (43) можно выразить $k_z$ для необыкновенной волны:

$$k_z^{(p)} = \sqrt{\varepsilon_\perp \left(k_0^2 - \frac{k_x^2}{\varepsilon_\parallel}\right)} . \tag{48}$$

Знак корня выбирается из условия излучения Зоммерфельда: волна должна не расти, а затухать при $z \to +\infty$. Это условие означает $\mathrm{Im}\,(k_z) > 0$. В гиперболическом режиме, когда подкоренное выражение отрицательно, $k_z$ становится чисто мнимым, что соответствует затухающей волне. Однако, в отличие от обычных материалов, эта затухающая волна может переносить энергию вдоль границы.

Теперь перейдём к решению граничной задачи. Для $s$-поляризации поля в вакууме ($z < 0$) записываются как суперпозиция падающей и отражённой волн:

$$\mathbf{E}_y(z) = E_i e^{ik_x x}(e^{ik_{z0}z} + r_s e^{-ik_{z0}z}) \,, \tag{49}$$

$$\mathbf{H}_x(z) = -\frac{k_{z0}}{\omega\mu_0} E_i e^{ik_x x}(e^{ik_{z0}z} - r_s e^{-ik_{z0}z}) \,, \tag{50}$$

$$\mathbf{H}_z(z) = \frac{k_x}{\omega\mu_0} E_i e^{ik_x x}(e^{ik_{z0}z} + r_s e^{-ik_{z0}z}) \,, \tag{51}$$

где $k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$ – $z$-компонента волнового вектора в вакууме, $r_s$ – коэффициент отражения для $s$-поляризации. В гиперболических метаматериалах ($z > 0$) для $s$-поляризации существует только обыкновенная волна:

$$\mathbf{E}_y\,(z) = t_s E_i e^{ik_x x} e^{ik_z^{(s)} z}, \tag{52}$$

$$\mathbf{H}_x\,(z) = -\frac{k_z^{(s)}}{\omega\mu_0} t_s E_i e^{ik_x x} e^{ik_z^{(s)} z} \,, \tag{53}$$

$$\mathbf{H}_z\,(z) = \frac{k_x}{\omega\mu_0} t_s E_i e^{ik_x x} e^{ik_z^{(s)} z} \,, \tag{54}$$

где $t_s$ – коэффициент пропускания, а $k_z^{(s)} = \sqrt{k_0^2\varepsilon_\perp - k_x^2}$ из (41). Условия непрерывности тангенциальных компонент $\mathbf{E}_y$ и $\mathbf{H}_x$ при $z = 0$ дают систему:

$$1 + r_s = t_s \,, \tag{55}$$

$$k_{z0}\,(1 - r_s) = k_z^{(s)} t_s \,. \tag{56}$$

Решая её, находим коэффициенты Френеля для $s$-поляризации:

$$r_s = \frac{k_{z0} - k_z^{(s)}}{k_{z0} + k_z^{(s)}} \,, \tag{57}$$

$$t_s = \frac{2k_{z0}}{k_{z0} + k_z^{(s)}} \,. \tag{58}$$

Эти выражения формально совпадают с таковыми для изотропной среды с эффективной проницаемостью $\varepsilon_\perp$, однако физика процесса иная, поскольку $k_z^{(s)}$ может быть комплексным даже при отсутствии потерь, если $\varepsilon_\perp < 0$.

Для $p$-поляризации расчёт сложнее. Поля в вакууме:

$$\mathbf{E}_x\,(z) = E_i \cos\theta_i e^{ik_x x}(e^{ik_{z0}z} - r_p e^{-ik_{z0}z}) \,, \tag{59}$$

$$\mathbf{E}_z\,(z) = -E_i \sin\theta_i e^{ik_x x}(e^{ik_{z0}z} + r_p e^{-ik_{z0}z}) \,, \tag{60}$$

$$\mathbf{H}_y\,(z) = \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_i e^{ik_x x}(e^{ik_{z0}z} + r_p e^{-ik_{z0}z}) \,. \tag{61}$$

В гиперболических метаматериалах для $p$-поляризации существует только необыкновенная волна. Её поля выражаются через амплитуду $t_p$ и волновой вектор $\mathbf{k}_t = \left(k_x, 0, k_z^{(p)}\right)$, где $k_z^{(p)}$ задаётся формулой (46). Однако направление вектора $\mathbf{E}$ не перпендикулярно $\mathbf{k}_t$ из-за анизотропии. Из уравнений Максвелла $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ и $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$ следует связь между компонентами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Для $p$-поляризации в гиперболических метаматериалах ($\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$) получаем:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_y \,, \tag{62}$$

$$-ik_z^{(p)} H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\perp E_x \,, \tag{63}$$

$$ik_x H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\parallel E_z \,. \tag{64}$$

Отсюда находим отношения компонент электрического поля в гиперболических метаматериалах:

$$\frac{E_x}{E_z} = -\frac{k_z^{(p)}\varepsilon_\parallel}{k_x\varepsilon_\perp} \ . \tag{65}$$

Таким образом, поля в гиперболических метаматериалах для $p$-поляризации можно записать как:

$$\mathbf{E}_x\left(z\right) = t_p E_i \cos\theta_i e^{ik_x x} e^{ik_z^{(p)} z} A \ , \tag{66}$$

$$\mathbf{E}_z\left(z\right) = t_p E_i \cos\theta_i e^{ik_x x} e^{ik_z^{(p)} z} B \ , \tag{67}$$

$$\mathbf{H}_y\left(z\right) = t_p \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_i e^{ik_x x} e^{ik_z^{(p)} z} C \ , \tag{68}$$

где $A$, $B$, $C$ – константы, определяемые из соотношений (58)-(60). В частности, из (60) и (58) следует:

$$E_x = -\frac{k_z^{(p)}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_\perp} H_y, \quad E_z = \frac{k_x}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_\parallel} H_y \ . \tag{69}$$

Сравнивая с (61) и (62), находим:

$$A = -\frac{k_z^{(p)}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_\perp} \cdot \frac{\omega\mu_0}{k_0 C}, \quad B = \frac{k_x}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_\parallel} \cdot \frac{\omega\mu_0}{k_0 C} \ . \tag{70}$$

Удобно выбрать нормировку так, чтобы $C = 1$, тогда:

$$A = -\frac{k_z^{(p)}}{k_0\varepsilon_\perp}, \quad B = \frac{k_x}{k_0\varepsilon_\parallel}. \tag{71}$$

Теперь условия непрерывности при $z = 0$ для $p$-поляризации: непрерывность $E_x$ и $H_y$. Из (55) и (61) с учётом (66):

$$\cos\theta_i(1 - r_p) = t_p A = -t_p \frac{k_z^{(p)}}{k_0\varepsilon_\perp} \ , \tag{72}$$

$$\frac{k_0}{\omega\mu_0}(1 + r_p) = t_p \frac{k_0}{\omega\mu_0} \ . \tag{73}$$

Из (68) сразу следует:

$$1 + r_p = t_p. \tag{74}$$

Подставляя (69) в (67), получаем:

$$\cos\theta_i\left(1 - r_p\right) = -\left(1 + r_p\right)\frac{k_z^{(p)}}{k_0\varepsilon_\perp}. \tag{75}$$

Выражая $r_p$:

$$r_p = \frac{\cos\theta_i + \frac{k_z^{(p)}}{k_0\varepsilon_\perp}}{\cos\theta_i - \frac{k_z^{(p)}}{k_0\varepsilon_\perp}}. \tag{76}$$

Учитывая, что $k_{z0} = k_0\cos\theta_i$ и $k_x = k_0\sin\theta_i$, а также используя дисперсионное соотношение (43), можно преобразовать ((71) к более симметричному виду. После алгебраических преобразований получаем окончательное выражение для коэффициента отражения $p$-поляризации:

$$r_p = \frac{\varepsilon_\parallel k_{z0} - k_z^{(p)}}{\varepsilon_\parallel k_{z0} + k_z^{(p)}}. \tag{77}$$

Соответственно, коэффициент пропускания:

$$t_p = \frac{2\varepsilon_\parallel k_{z0}}{\varepsilon_\parallel k_{z0} + k_z^{(p)}} \ . \tag{78}$$

Заметим, что при $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = \varepsilon$ формулы (43) и (44) переходят в стандартные формулы Френеля для изотропной среды. Коэффициент пропускания по полю $t_p$ связан с коэффициентом пропускания по энергии $T_p$ соотношением, учитывающим изменение импеданса:

$$T_p = |t_p|^2 \frac{\mathrm{Re}(k_z^{(p)}/\varepsilon_\perp)}{k_{z0}} \ . \tag{79}$$

Аналогично для $s$-поляризации:

$$T_s = |t_s|^2 \frac{\mathrm{Re}(k_z^{(s)})}{k_{z0}} \ . \tag{80}$$

Формулы (52), (53), (72), (73) являются основными результатами теоретической части и позволяют провести полный анализ отражения и пропускания гиперболических метаматериалах.

Проанализируем полученные выражения коэффициентов отражения и пропускания излучения. Начнём с $s$-поляризации. Коэффициент отражения $r_s$ определяется формулой (52). Его поведение качественно похоже на случай изотропной среды с $\varepsilon = \varepsilon_\perp$. Если $\varepsilon_\perp > 0$ и вещественно, то при $\sin\theta_i > \sqrt{\varepsilon_\perp}$ наступает полное внутреннее отражение, $k_z^{(s)}$ становится мнимым, и $|r_s| = 1$. Если же $\varepsilon_\perp < 0$ (что возможно в гиперболических метаматериалах второго типа), то $k_z^{(s)}$ всегда мнимый, и отражение полное при всех углах падения, $|r_s| = 1$.

Интересные эффекты возникают для $p$-поляризации. Коэффициент $r_p$ задаётся формулой (72). Он обращается в нуль, когда числитель равен нулю:

$$\varepsilon_\parallel k_{z0} - k_z^{(p)} = 0 \ . \tag{81}$$

Это условие можно переписать, используя (17):

$$\varepsilon_\parallel^2 k_0^2 \cos^2\theta_i = \varepsilon_\perp (k_0^2 \varepsilon_\parallel - k_0^2 \sin^2\theta_i) \ . \tag{82}$$

Решая относительно $\sin^2\theta_B$ (угол Брюстера), получаем:

$$\sin^2\theta_B = \frac{\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)}{\varepsilon_\parallel^2 - \varepsilon_\perp} \ . \tag{83}$$

В изотропном случае ($\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = \varepsilon$) это даёт стандартный результат $\tan\theta_B = \sqrt{\varepsilon}$. В гиперболическом случае, когда $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ имеют разные знаки, уравнение (79) может иметь вещественное решение $\theta_B$ даже при вещественных $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$. Это означает существование угла, при котором отражение $p$-поляризованной волны полностью исчезает, несмотря на то, что импедансы вакуума и гиперболического метаматериала не совпадают. Этот эффект можно назвать псевдо-Брюстеровским эффектом.

Рассмотрим численный пример. Пусть $\varepsilon_\perp = 2$, $\varepsilon_\parallel = -3 + i\delta$, где $\delta$ – малый параметр потерь. Подставляя в (79), получаем:

$$\sin^2\theta_B = \frac{(-3)(-3-2)}{9-2} = \frac{15}{7} \approx 2.14 \ . \tag{84}$$

Это значение больше 1, что означает отсутствие вещественного угла Брюстера. Однако если взять $\varepsilon_\perp = -2$, $\varepsilon_\parallel = 3$, то:

$$\sin^2\theta_B = \frac{3(3-(-2))}{9-(-2)} = \frac{15}{11} \approx 1.36, \tag{85}$$

что также больше 1. Таким образом, для вещественных $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$ с разными знаками условие $r_p = 0$ не может быть выполнено для вещественного $\theta_B$. Однако при учёте потерь ($\mathrm{Im}(\varepsilon_\alpha) \neq 0$) минимум коэффициента отражения может наблюдаться при некотором угле, близком к мнимому решению уравнения (77).

Другим важным аспектом является поведение $k_z^{(p)}$ при больших $k_x$. Из (46) следует, что при $k_x \to \infty$:

$$k_z^{(p)} \approx ik_x\sqrt{-\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}}. \tag{86}$$

В гиперболическом режиме подкоренное выражение положительно, и $k_z^{(p)}$ растёт линейно с $k_x$. Это означает, что высоко-пространственные гармоники (ближнее поле) экспоненциально затухают в гиперболических метаматериалах на очень малых расстояниях. Однако, как будет показано ниже, это затухание может компенсироваться большими значениями коэффициента пропускания $t_p$ для таких гармоник.

Проанализируем коэффициент пропускания $t_p$ из (44). При больших $k_x$ имеем $k_{z0} \approx ik_x$, $k_z^{(p)} \approx ik_x\sqrt{-\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}$. Подставляя в (44), получаем:

$$t_p \approx \frac{2\varepsilon_\parallel(ik_x)}{\varepsilon_\parallel(ik_x) + ik_x\sqrt{-\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}} = \frac{2\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\parallel + \sqrt{-\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}}\,. \tag{87}$$

Если $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ вещественны и имеют противоположные знаки, то знаменатель вещественен, и $t_p$ не стремится к нулю при $k_x \to \infty$, в отличие от случая обычных диэлектриков, где $t_p \sim 1/k_x$. Это ключевое наблюдение: гиперболические метаматериалы могут эффективно пропускать сквозь границу волны с очень большими поперечными волновыми числами. Именно это свойство лежит в основе их способности преодолевать дифракционный предел.

Однако на практике из-за неизбежных потерь коэффициент $t_p$ на больших $k_x$ всё же ограничен. Рассмотрим модель с потерями: $\varepsilon_\parallel = \varepsilon'_\parallel + i\varepsilon''_\parallel$, $\varepsilon_\perp = \varepsilon'_\perp + i\varepsilon''_\perp$. Тогда при $k_x \to \infty$:

$$k_z^{(p)} \approx ik_x\sqrt{-\frac{\varepsilon'_\perp + i\varepsilon''_\perp}{\varepsilon'_\parallel + i\varepsilon''_\parallel}}\,. \tag{88}$$

Это выражение можно упростить, предположив малые потери ($\varepsilon'' \ll |\varepsilon'|$):

$$k_z^{(p)} \approx ik_x\sqrt{-\frac{\varepsilon'_\perp}{\varepsilon'_\parallel}}\left(1 + \frac{i}{2}\left(\frac{\varepsilon''_\perp}{\varepsilon'_\perp} - \frac{\varepsilon''_\parallel}{\varepsilon'_\parallel}\right)\right)\,. \tag{89}$$

Тогда мнимая часть имеет вид:

$$\mathrm{Im}\left(k_z^{(p)}\right) \approx k_x\sqrt{-\frac{\varepsilon'_\perp}{\varepsilon'_\parallel}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon''_\perp}{\varepsilon'_\perp} - \frac{\varepsilon''_\parallel}{\varepsilon'_\parallel}\right)\,. \tag{90}$$

Для существования затухающей волны необходимо $\mathrm{Im}\left(k_z^{(p)}\right) > 0$, что накладывает условие на соотношение потерь:

$$\frac{\varepsilon''_\perp}{\varepsilon'_\perp} > \frac{\varepsilon''_\parallel}{\varepsilon'_\parallel}\,. \tag{91}$$

Если это условие нарушается, то в среде могут возникать усиленные волны, что указывает на неустойчивость.

Коэффициент пропускания $t_p$ при больших $k_x$ в модели с потерями:

$$t_p \approx \frac{2(\varepsilon'_{\parallel} + i\varepsilon''_{\parallel})}{(\varepsilon'_{\parallel} + i\varepsilon''_{\parallel}) + \sqrt{-(\varepsilon'_{\perp} + i\varepsilon''_{\perp})(\varepsilon'_{\parallel} + i\varepsilon''_{\parallel})}} \,. \tag{92}$$

Его модуль $|t_p|$ стремится к константе, но эта константа может быть меньше, чем в случае без потерь, из-за мнимых частей.

## Модель гиперболических метаматериалов

Фундаментальные физические постоянные и параметры материалов, используемые в программе, принимают следующие значения: скорость света в вакууме равна $c = 2.99792458e8$ м/с, магнитная постоянная равна $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, электрическая постоянная равна $\varepsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, волновое сопротивление вакуума $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

Эффективная диэлектрическая проницаемость для наноразмерных включений серебра описывается моделью Друде:

$$\varepsilon_{Ag}(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \,, \tag{93}$$

где использованы следующие обозначения физических величин: циклическая частота $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, плазменная частота $\omega_p = 1.37 \cdot 10^{16}$ рад/с, коэффициент затухания $\gamma = 1.07 \cdot 10^{14}$ рад/с, высокочастотная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_\infty = 3.7$ [51].

Диэлектрическая проницаемость матрицы из оксида алюминия $Al_2O_3$ моделируется с использованием соотношения типа:

$$\varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{3} \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j^2} \,, \tag{94}$$

где коэффициенты $B_j$ и $C_j$ подобраны по экспериментальным данным.

Для нанокомпозитного материала с объёмной долей $f$ включений (серебра) компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости в приближении Максвелл–Гарнетта для поперечной и продольной компонент определяются следующим образом:

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon_m \frac{1 + 2f\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m}}{1 - f\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m}} \,, \tag{95}$$

$$\varepsilon_\parallel = \varepsilon_m \frac{1 + f\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + \varepsilon_m}}{1 - f\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + \varepsilon_m}} \,, \tag{96}$$

где $\varepsilon_m$ – диэлектрическая проницаемость матрицы ($\varepsilon_{Al_2O_3}$), а $\varepsilon_i$ – диэлектрическая проницаемость включений ($\varepsilon_{Ag}$).

Материал проявляет гиперболическую дисперсию, когда выполняется условие гиперболического режима:

$$\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp < 0 \,. \tag{97}$$

Эффективные компоненты диэлектрической проницаемости нанокомпозита вычис-

ляются для каждой длины волны $\lambda$ и объёмной доли $f$:

$$\varepsilon_{\perp}(\lambda, f) = \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda) \frac{1 + 2f \frac{\varepsilon_{Ag}(\lambda) - \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}{\varepsilon_{Ag}(\lambda) + 2\varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}}{1 - f \frac{\varepsilon_{Ag}(\lambda) - \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}{\varepsilon_{Ag}(\lambda) + 2\varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}} , \tag{98}$$

$$\varepsilon_{\parallel}(\lambda, f) = \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda) \frac{1 + f \frac{\varepsilon_{Ag}(\lambda) - \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}{\varepsilon_{Ag}(\lambda) + \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}}{1 - f \frac{\varepsilon_{Ag}(\lambda) - \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}{\varepsilon_{Ag}(\lambda) + \varepsilon_{Al_2O_3}(\lambda)}} . \tag{99}$$

Эффективный показатель преломления нанокомпозита определяется как геометрическое среднее компонент тензора диэлектрической проницаемости:

$$n_{eff}(\lambda, f) = \sqrt{\varepsilon_{\perp}(\lambda, f)\, \varepsilon_{\parallel}(\lambda, f)} . \tag{100}$$

Поверхностный импеданс нанокомпозита задаётся выражением:

$$\zeta_s(\lambda, f) = \sqrt{\frac{\mu_{eff}}{\varepsilon_{\perp}(\lambda, f)}} , \tag{101}$$

где $\mu_{eff}$ – эффективная магнитная проницаемость нанокомпозита.

Коэффициенты отражения ($R$), пропускания ($T$) и поглощения ($A$) рассчитываются с использованием метода матриц переноса с коэффициентами Френеля для однослойной структуры на подложке. Векторы волновых чисел вычисляются по формулам:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} , \tag{102}$$

$$k_x = k_0 \sin(\theta_i) , \tag{103}$$

$$k_{z,film} = \sqrt{\varepsilon_{\perp} k_0^2 - k_x^2} . \tag{104}$$

Характеристические поверхностные импедансы вычисляются по следующим формулам:

$$\zeta_{air} = \zeta_0 , \tag{105}$$

$$\zeta_{film} = \sqrt{\frac{\mu_{eff}}{\varepsilon_{\perp}}} , \tag{106}$$

$$\zeta_s = \frac{\zeta_0}{n_s} , \tag{107}$$

Матрицы переноса вычисляются по формулам:

$$M_{film} = \begin{pmatrix} \cos(k_{z,film} d) & i\zeta_{film} \sin(k_{z,film} d) \\ \frac{i}{\zeta_{film}} \sin(k_{z,film} d) & \cos(k_{z,film} d) \end{pmatrix} , \tag{108}$$

$$M_n = M_{air} M_{film} M_s . \tag{109}$$

Амплитудные коэффициенты Френеля вычисляются по формулам:

$$r = \frac{M_n(1,1)}{M_n(2,1)} , \tag{110}$$

$$t = \frac{1}{M_n(2,1)} . \tag{111}$$

Энергетические коэффициенты Френеля вычисляются по формулам:

$$R = |r|^2 \ , \tag{112}$$

$$T = \frac{\zeta_{air}}{\zeta_s} \cos\theta_i \, |t|^2 \ , \tag{113}$$

$$A = 1 - R - T \ . \tag{114}$$

Для гиперболических материалов дисперсионное соотношение в пространстве волновых векторов имеет вид:

$$\frac{k_\parallel^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{k_\perp^2}{\varepsilon_\perp} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \ , \tag{115}$$

Это уравнение описывает изочастотные поверхности, которые проявляют гиперболическую форму, когда $\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp < 0$.

Модель позволяет визуализировать комплексные компоненты диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$), эффективный показатель преломления $n_{\text{eff}}$, поверхностный импеданс $Z_s$, коэффициенты Френеля ($R$, $T$, $A$) в виде двумерных и трёхмерных контурных карт, изочастотные поверхности в пространстве волновых векторов и карты усиления поглощения излучения.

В теоретической модели учитывается эффективная магнитная проницаемость включений (серебро/оксид алюминия) с использованием аппроксимации Друде-Лоренца:

$$\mu_{\text{eff}}(\lambda) = 1 + \frac{F_m \omega_{pm}^2}{\omega_{0m}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_m} \ , \tag{116}$$

где параметры подбираются на основе геометрии наноструктур: $\omega_T = \frac{4c(r_1+r_2)}{\pi\sqrt{r_1}r_2^{3/2}}$, $\omega_{0m} = 0.07\omega_T$, $\omega_{pm} = 1.25\sqrt{2}\omega_{0m}$, где $r_1$ и $r_2$ – характерные радиусы включений.

В программной реализации учитываются следующие условия моделирования: диапазон объёмных долей включений $f \in [0.02, 0.06]$ с шагом 0.02, диапазон углов падения $\theta_i \in [0°, 60°]$, толщина плёнки $d = 750$ нм, показатель преломления подложки $n_s = 1.52$, подавление сингулярностей при расчётах методом матриц переноса, визуализация комплексных величин (действительная, мнимая части, модуль и фаза).

## Результаты численных расчётов оптических характеристик гиперболических метаматериалов

Разработка программы численного моделирования оптических процессов в плёнках из гиперболического метаматериала представляет собой многоэтапный процесс, требующий логического согласования физических моделей, численных методов и алгоритмической реализации. Описание этапов разработки начинается с предварительного анализа физических основ, необходимых для корректного макетирования взаимодействия света с композитной средой, и завершается визуализацией и анализом результатов. Ниже приведено последовательное описание этапов, объединённых единой концептуальной цепочкой.

Начальный этап предполагает определение физической модели системы и задаёт основные параметры, которые должны быть учтены в вычислениях. На этом шаге формулируются базовые уравнения для эффективных параметров метаматериала — диэлектрической и магнитной проницаемости в приближении Максвелл–Гарнетта. Важно сформулировать граничные условия для оптического спектрального диапазона, где компоненты метаматериала (например, серебро и оксид алюминия) проявляют специфические дисперсионные свойства. На этом этапе также уточняются геометрические

параметры включений (радиусы, периоды решётки) и выбираются подходящие материалы, соответствующие реальным экспериментальным данным или теоретическим расчётам.

Следующим логически связанным шагом становится определение материальных уравнений, описывающих диэлектрическую и магнитную проницаемости отдельных компонентов композита. Здесь формулируются дисперсионные модели для включений из гиперболического метаматериала на основе теоретических представлений (например, модель Друде для металла и уравнения Лоренца для диэлектриков). Важно учитывать параметры затухания, плазменные частоты и другие характеристики, которые определяют оптическое поведение материалов в выбранном диапазоне длин волн. Этот этап включает написание функций для расчёта комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей, которые могут быть использованы в дальнейших вычислениях.

На третьем этапе разрабатывается модель эффективной среды с применением приближения Максвелл–Гарнетта. Здесь формулируются выражения для эффективной диэлектрической проницаемости в двух перпендикулярных направлениях (поперечном и продольном) и эффективной магнитной проницаемости, что позволяет учесть анизотропные свойства композита. Этот шаг требует учёта объёмной доли включений и корректного выбора параметров для формул Максвелл–Гарнетта, что позволяет получить эффективные параметры композита. Расчёт эффективного показателя преломления и поверхностного импеданса плёнок является ключевым результатом данного этапа.

Далее происходит формирование базы для численных расчётов, где реализуются функции для вычисления указанных параметров. На этом этапе создаются функции для расчёта эффективных параметров композита, а также функции для поверхностного импеданса, которые основываются на ранее полученных выражениях для диэлектрической и магнитной проницаемости. Проверка корректности функций происходит с использованием тестовых значений, что позволяет убедиться в их стабильности и точности.

Следующий этап предполагает настройку пользовательских параметров, таких как диапазон длин волн излучения, углы падения излучения, объёмная доля включений и толщина нанокомпозитной плёнки. Эти параметры задают условия для конкретных вычислений и визуализации, что позволяет адаптировать программу для различных сценариев моделирования. На этом этапе также проводится подготовка данных для последующего анализа — например, создание массивов для хранения результатов расчётов в зависимости от изменения параметров.

На шестом этапе происходит расчёт оптических характеристик композитной плёнки по заданным параметрам, включая эффективные диэлектрическую и магнитную проницаемости, показатель преломления и поверхностный импеданс. Здесь применяются методы численного моделирования для получения коэффициентов Френеля, которые позволяют оценить отражение, пропускание и поглощение света на границе сред. Включение матричного метода для расчёта характеристик плёнки на подложке является важной частью этого этапа и требует точного учёта граничных условий и фазовых сдвигов.

Параллельно с численным расчётом физических параметров происходит анализ дисперсионных характеристик нанокомпозита, который включает исследование изочастотных поверхностей в пространстве волновых векторов. Это позволяет определить области гиперболического режима, где материал проявляет уникальные оптические свойства, такие как суперфокусировка и направленное излучение. Графическое представление этих зависимостей в $k$-пространстве позволяет наглядно оценить области с гиперболической дисперсией.

После получения численных данных проводится визуализация результатов, которая

включает построение двумерных, трёхмерных и контурных графиков, отображающих зависимость коэффициентов отражения, пропускания и поглощения от длины волны и угла падения. Визуализация также включает построение спектров эффективных параметров, что позволяет более наглядно оценить поведение метаматериала в выбранном диапазоне длин волн. Этот этап важен для интерпретации результатов и их использования в дальнейших экспериментах или теоретических исследованиях.

Завершающим этапом является проверка и оптимизация модели, где результаты расчётов сравниваются с экспериментальными данными или известными теоретическими моделями. Корректировка параметров модели (например, частот затухания, плазменных частот) позволяет улучшить согласие между расчётными и экспериментальными данными. На этом этапе также проводится анализ чувствительности параметров для выявления их влияния на оптические характеристики композита.

Компьютерная программа дополняется модулями сохранения и загрузки данных, что позволяет экспортировать результаты расчётов в удобные форматы для последующего анализа. Это также важно для автоматизации процессов моделирования и быстрого возврата к ранее проведённым расчётам.

Последним логическим шагом становится документирование и тестирование программы, что включает создание подробной документации с описанием используемых алгоритмов, физических моделей и параметров. Также важно добавить тесты для проверки корректности работы каждой функции, что позволяет избежать ошибок в будущем и облегчает модификацию программы под новые условия моделирования.

На каждом из этапов важно поддерживать логическую связь между физическими основаниями модели и алгоритмической реализацией, что позволяет получить надёжные и воспроизводимые результаты. Таким образом, программа становится мощным инструментом для исследования оптических свойств гиперболических метаматериалов и их применения в различных областях оптоэлектроники и фотоники.

На рис. 1 приведено изображение фрагмента компьютерной программы для численного расчёта оптических характеристик гиперболических метаматериалов.

На рис. 2 приведено изображение фрагмента компьютерной программы для численного расчёта оптических характеристик гиперболических метаматериалов.

Приведём подробное описание основных блоков разработанной программы для численных расчётов оптических характеристик гиперболических метаматериалов, реализованное в программном коде на языке программирования Python.

Блок физических констант открывает программу и задаёт фундаментальные параметры, необходимые для всех последующих вычислений. Здесь определяются скорость света в вакууме, магнитная и электрическая проницаемость вакуума, а также импеданс свободного пространства. Эти универсальные значения служат базой для всех инженерных расчётов в оптическом диапазоне и обеспечивают единый стандарт для сравнения с экспериментальными данными.

Раздел параметров материалов содержит специализированные функции для описания дисперсионных свойств компонентов метаматериала. Функция для серебра реализована на основе модели Друде с учётом экспериментальных данных Джонсона и Кристи [51], что позволяет точно воспроизвести его поведение в оптическом диапазоне. Для оксида алюминия используется многозвенная диэлектрическая модель, учитывающая резонансные переходы, причем все параметры приведены для настройки в нанометровом диапазоне. Эта часть кода отвечает за физическую корректность модели на микроуровне.

Блок эффективной магнитной проницаемости реализует в приближении эффективной среды специализированную модель для магнитных включений, где учитывается эффективная магнитная проницаемость в заданной геометрии композита. Здесь особое

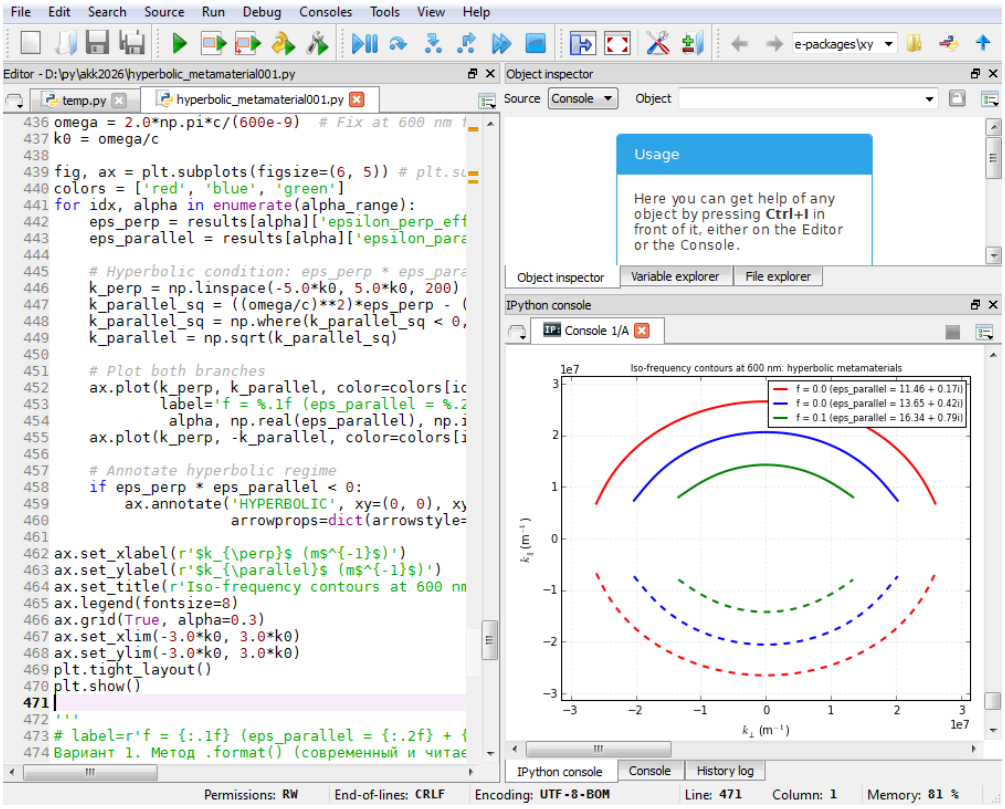



Рис. 1. Первый фрагмент компьютерной программы для численного расчёта оптических характеристик гиперболических метаматериалов.

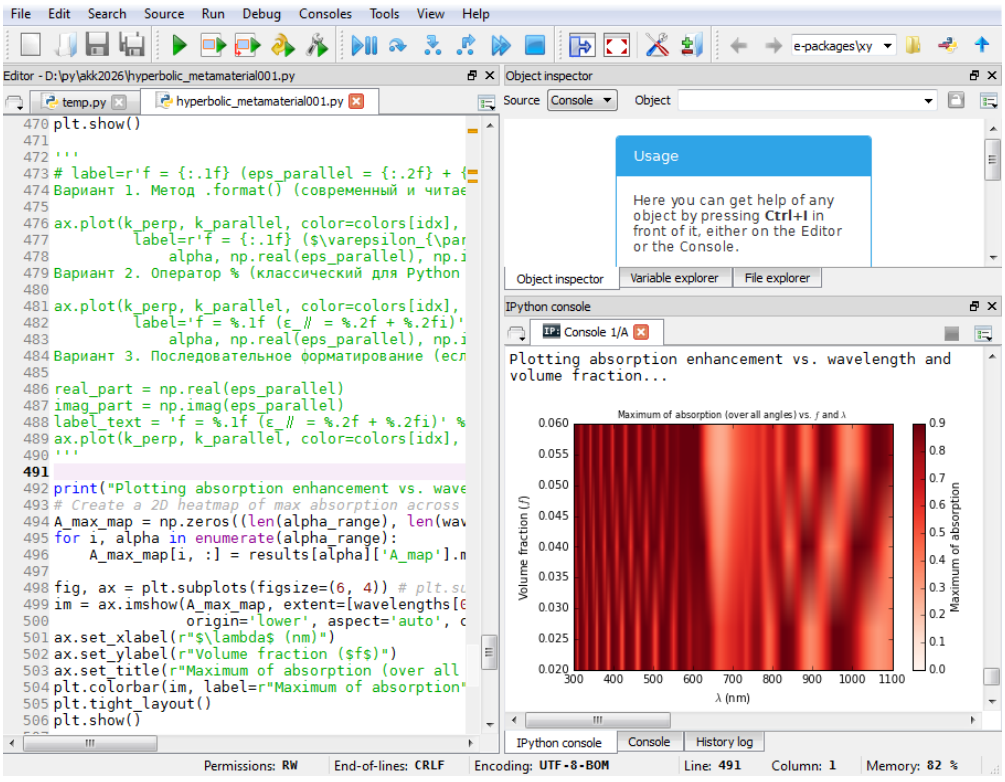



Рис. 2. Второй фрагмент компьютерной программы для численного расчёта оптических характеристик гиперболических метаматериалов.

внимание уделяется геометрическим параметрам — радиусам нанопроволок, зазорам между ними и периоду решётки, что позволяет учитывать пространственные эффекты в наноструктурированных материалах. Этот блок является уникальным для гиперболических метаматериалов и обеспечивает их специфическую анизотропию.

Блок приближения Максвелл–Гарнетта содержит три ключевые функции, реализующие эффективные свойства композитной среды. Функция для поперечной диэлектрической проницаемости учитывает влияние включений, ориентированных перпендикулярно направлению поля, в то время как функция для продольной компоненты описывает поведение вдоль включений. Для магнитной проницаемости используется аналогичный подход с учетом специфической магнитной модели включений. Эти функции математически связывают микроструктуру материала с его макроскопическими оптическими свойствами.

Модуль вычисления эффективных параметров объединяет предыдущие компоненты для формирования комплексных эффективных параметров метаматериала. Здесь рассчитывается геометрическое среднее для определения эффективного показателя преломления, который является важнейшей характеристикой для описания распространения света в такой среде. Параллельно вычисляется поверхностный импеданс, определяющий граничные условия на интерфейсах. Этот блок обеспечивает переход от микроскопического описания к макроскопическому, используя результаты предыдущих модулей.

Раздел численных расчетов с использованием матричного метода реализует алгоритм для вычисления коэффициентов Френеля с учётом конечной толщины плёнки и наличия подложки. Этот метод позволяет учитывать мультипольные отражения внутри плёнки и обеспечивает точное описание оптических свойств при косом падении. Здесь реализована полная процедура расчёта передаточной матрицы системы, включая границы раздела воздух-плёнка-подложка, что позволяет моделировать сложные оптические структуры с высокой точностью.

Подсистема визуализации комплексных величин предоставляет универсальный инструмент для анализа частотных зависимостей оптических параметров. Она позволяет одновременно анализировать действительную и мнимую части диэлектрической проницаемости, её модуль и фазу, что критично для понимания дисперсионных свойств метаматериала. Этот блок используется для оценки качества реализации моделей и их соответствия физическим ожиданиям.

Блок генерации карт Френеля создает двумерные, трёхмерные и контурные графики для визуализации отраженных, пропущенных и поглощенных компонент света. Эти представления позволяют наглядно оценить поведение метаматериала в различных условиях освещения и выявлять уникальные оптические эффекты, такие как суперфокусировка или направленное излучение. Карты служат важным инструментом для интерпретации результатов моделирования.

Блок численного анализа дисперсионных характеристик материальных параметров гиперболических метаматериалов реализует визуализацию изочастотных поверхностей в пространстве волновых векторов, что является ключевым для идентификации гиперболического режима материала. Этот модуль использует ранее вычисленные эффективные параметры гиперболических метаматериалов для построения диаграмм в $k$-пространстве и определению областей гиперболической дисперсии, где материал проявляет свои уникальные свойства. Построенные графики позволяют наглядно оценить условия, при которых материал переходит в гиперболический режим.

Подсистема параметрического анализа обеспечивает изучение зависимости оптических свойств от ключевых параметров модели. Здесь реализован расчет максимального поглощения в зависимости от объёмной доли включений и длины волны, что позво-

ляет оптимизировать структуру метаматериала для конкретных приложений. Карты зависимости служат важным инструментом для понимания чувствительности модели к изменению параметров и выбора оптимальных значений.

Блок документации и интерфейса содержит систему печатных сообщений, которые информируют пользователя о ходе выполнения программы и её завершения. Блок документации и интерфейса также предоставляет краткий обзор вычисленных характеристик, что важно для быстрой оценки результатов и планирования дальнейших исследований. Этот блок служит интерфейсом между численной моделью и пользователем, обеспечивая прозрачность процесса моделирования.

Блок управления параметрами координирует все компоненты компьютерной программы, обеспечивая взаимосвязь между различными модулями и настройку всех необходимых параметров. Здесь задаются диапазоны длин волн, углы падения, объёмные доли включений и другие ключевые параметры, которые определяют конкретный сценарий моделирования. Этот блок служит основой для адаптации программы к различным практическим задачам.

Каждый из этих блоков компьютерной программы логически связан с другими компонентами компьютерной программы и вносит вклад в комплексное моделирование оптических свойств гиперболических метаматериалов, обеспечивая переход от микроскопического описания к макроскопическому поведению всей структуры. Взаимодействие этих модулей позволяет проводить сложное численное моделирование с последующим анализом и визуализацией результатов численного моделирования оптических процессов плёнках из гиперболического метаматериала для оптического спектрального диапазона.

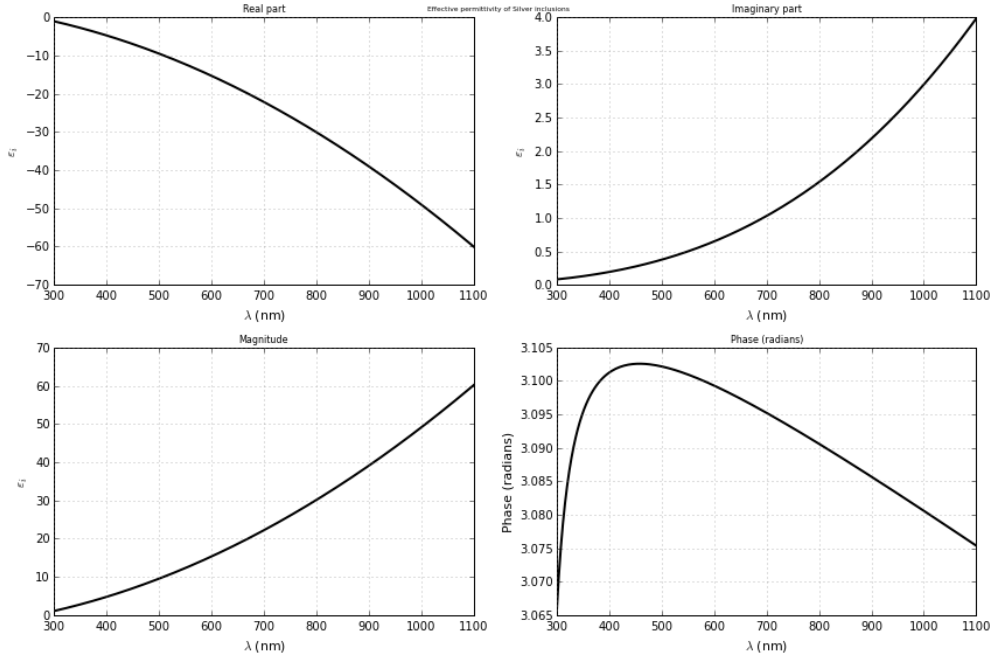



Рис. 3. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы диэлектрической проницаемости включений в гиперболических метаматериалах.

На рис. 3 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы диэлектрической проницаемости включений в гиперболических метаматериалах.

На рис. 4 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы поперечной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

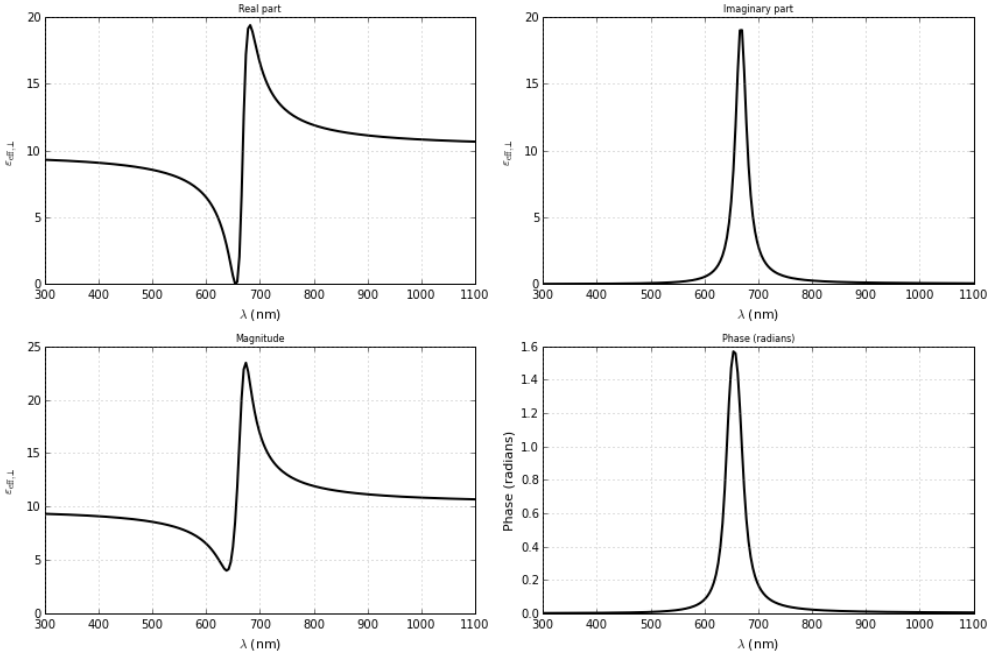



Рис. 4. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы поперечной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

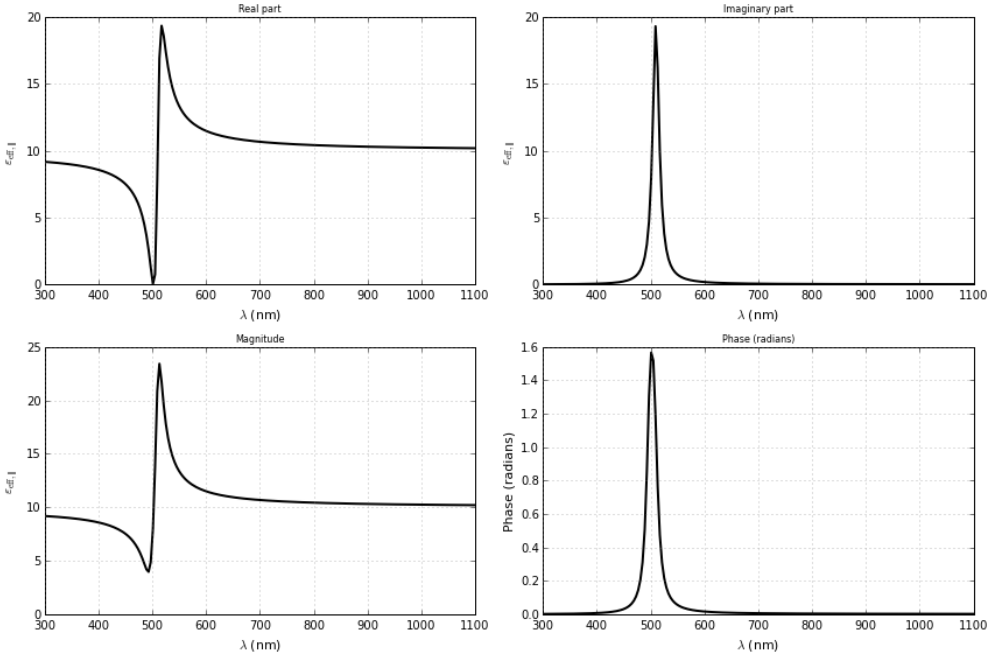



Рис. 5. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы продольной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

На рис. 5 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы продольной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

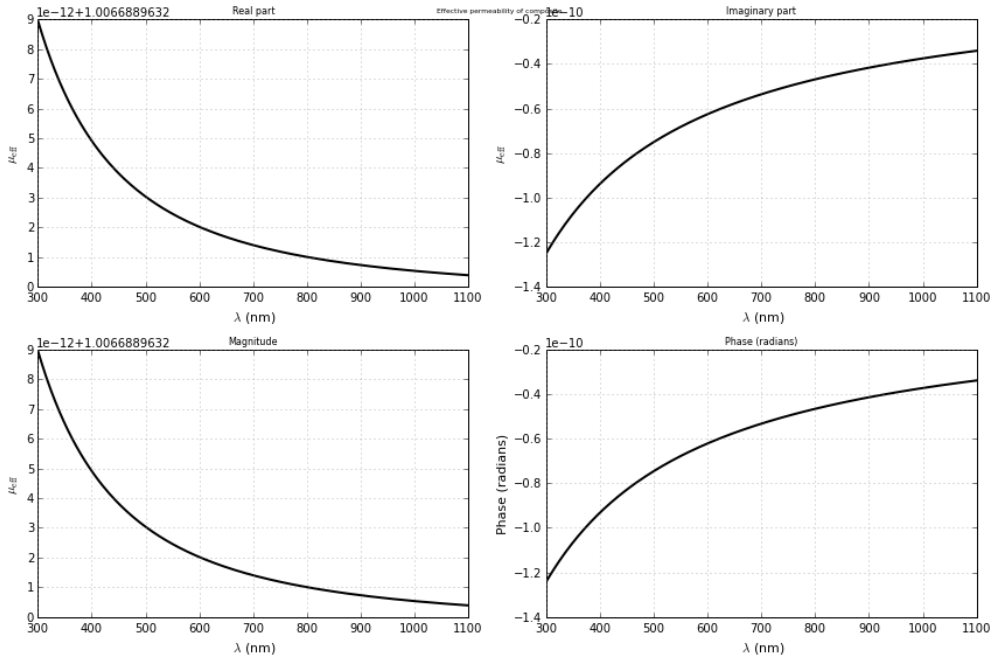



Рис. 6. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективной магнитной проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

На рис. 6 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективной магнитной проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

На рис. 7 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного показателя преломления нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

На рис. 8 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного поверхностного импеданса нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

На рис. 9 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы поперечной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

На рис. 10 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы продольной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

На рис. 11 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективной магнитной проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

На рис. 12 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного показателя преломления нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

На рис. 13 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного поверхностного импеданса нанокомпозита

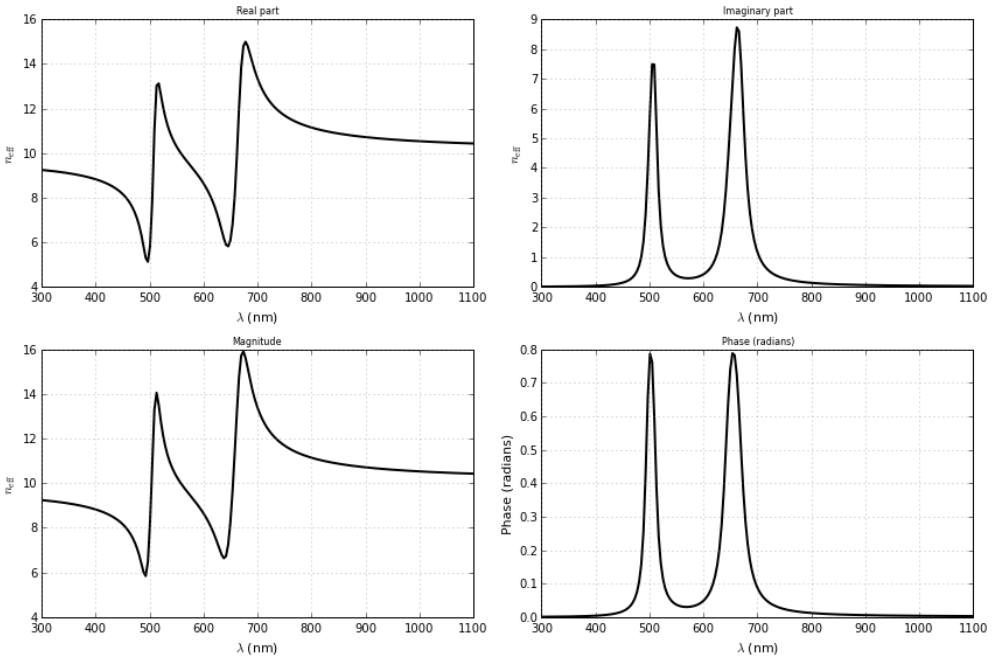



Рис. 7. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного показателя преломления нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

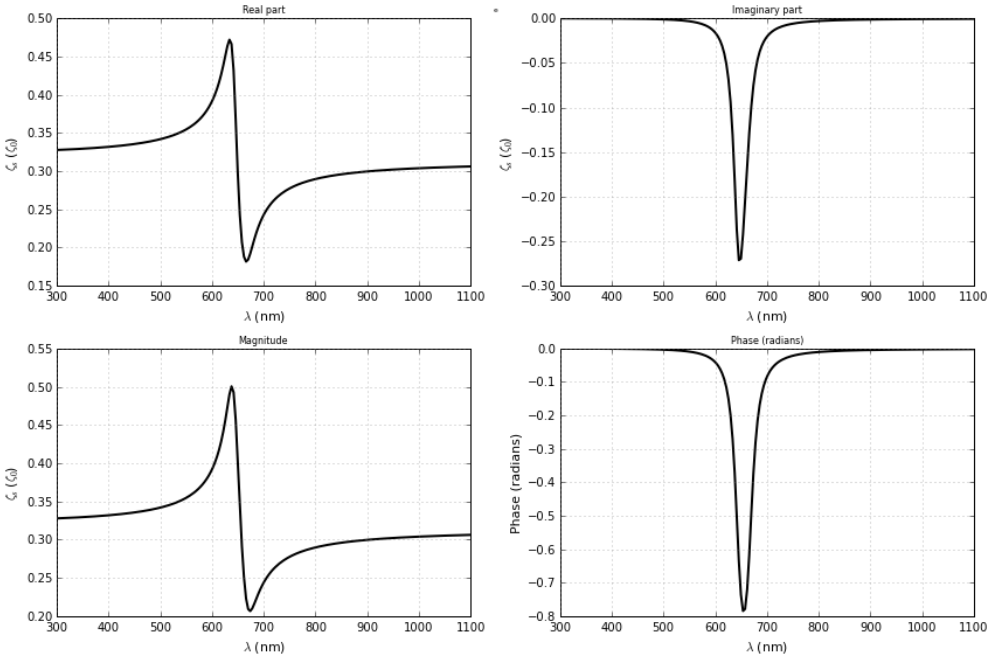



Рис. 8. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного поверхностного импеданса нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.02$.

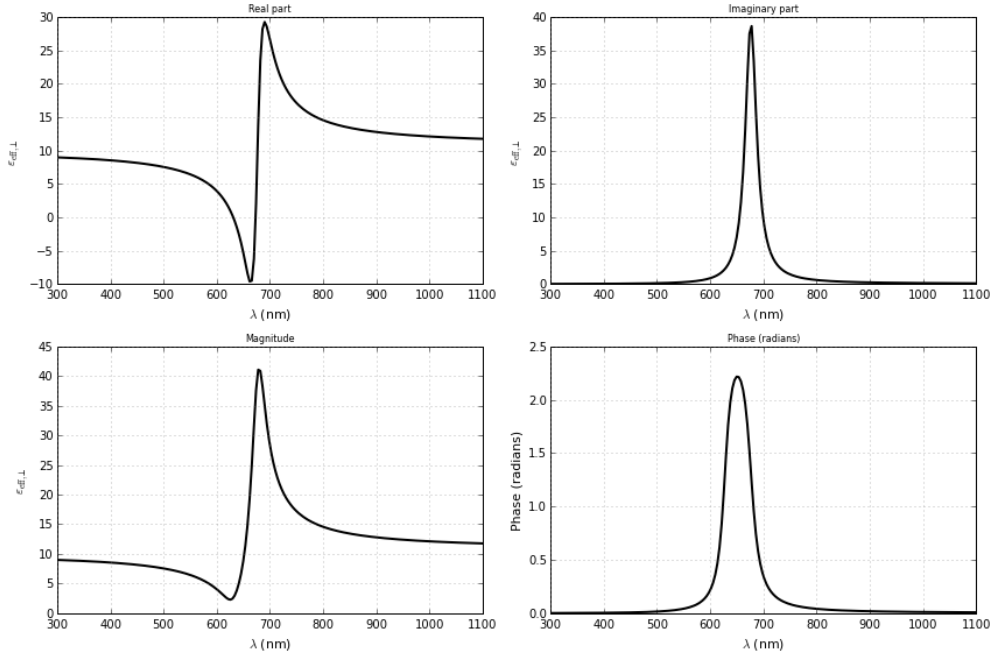



Рис. 9. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы поперечной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

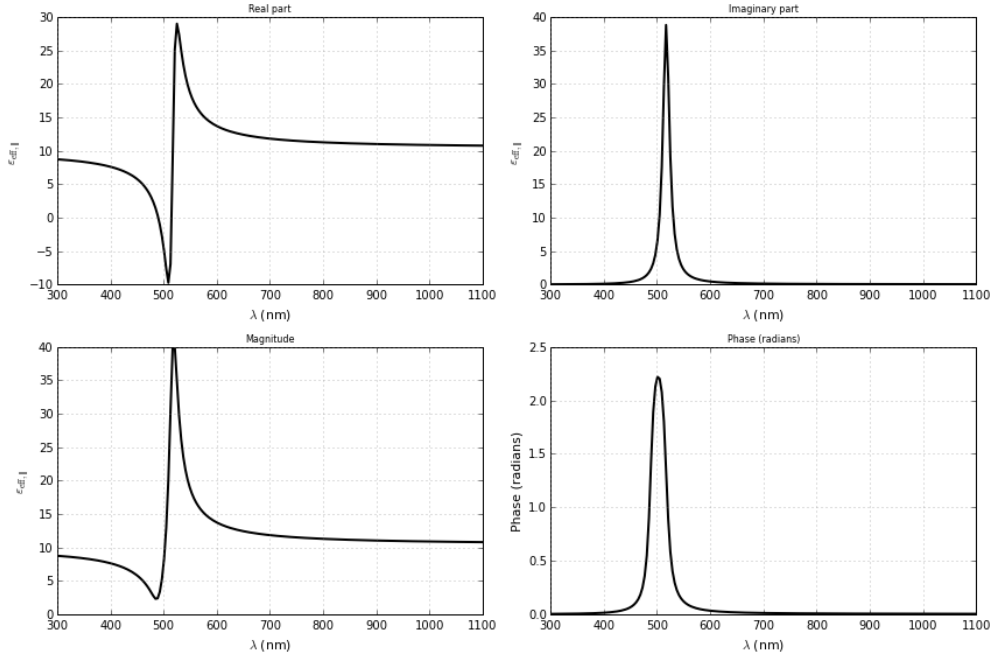



Рис. 10. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы продольной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

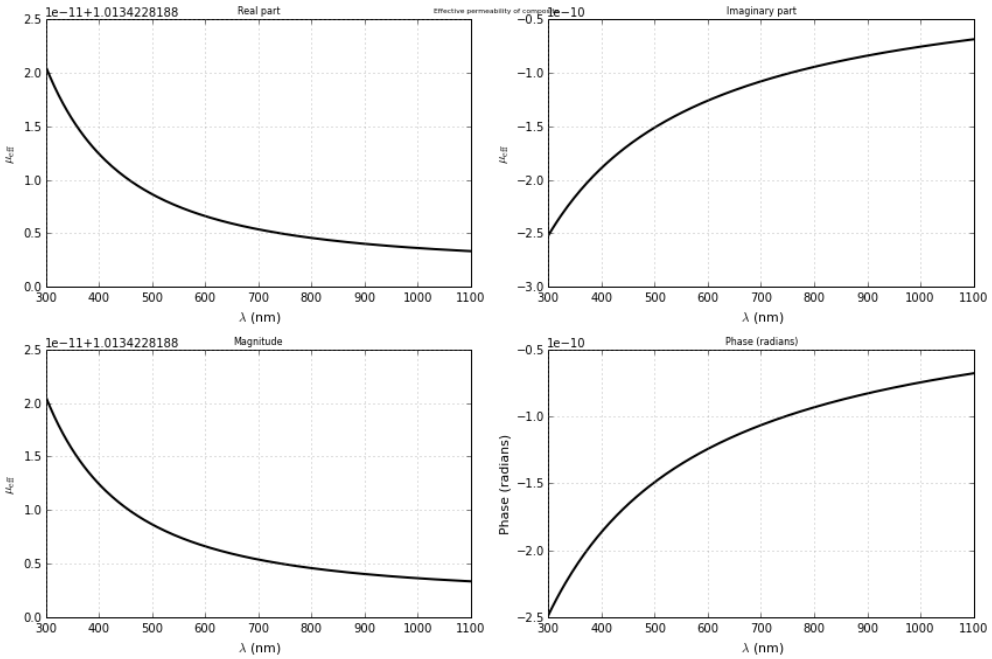



Рис. 11. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективной магнитной проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

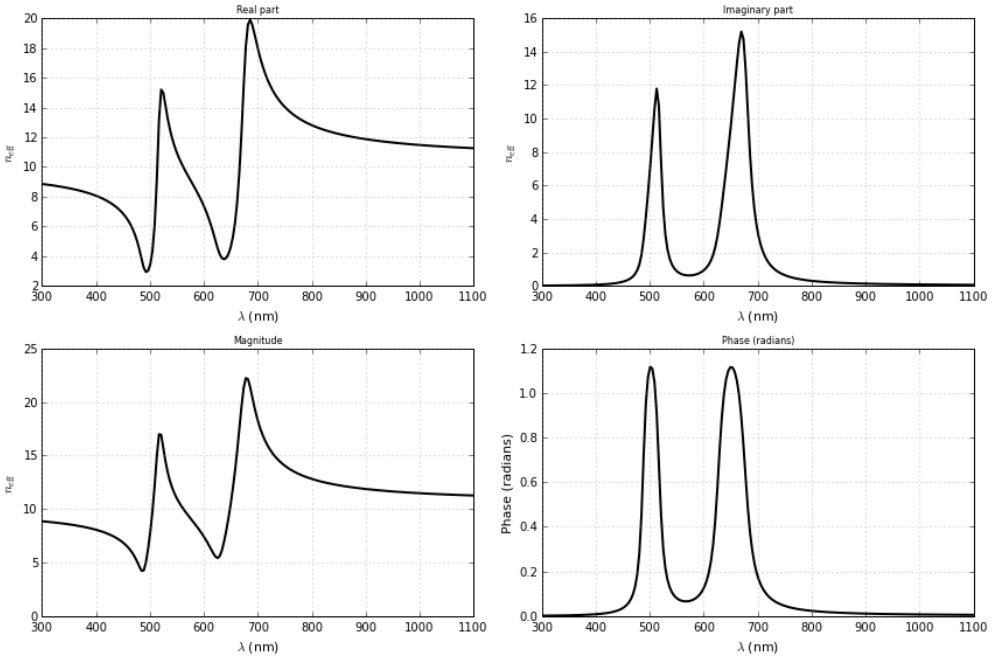



Рис. 12. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного показателя преломления нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

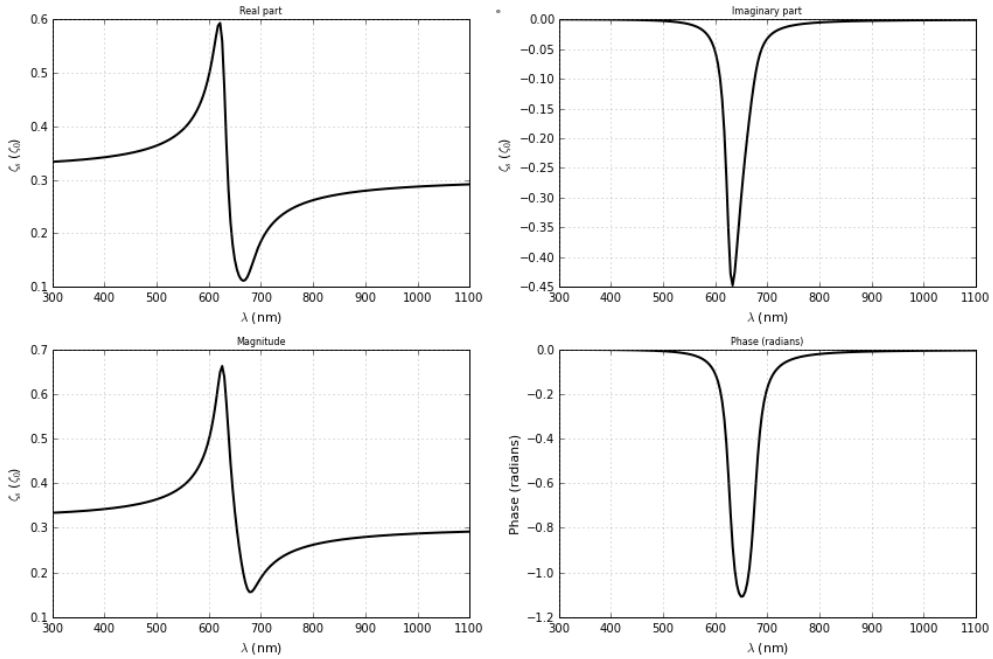



Рис. 13. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного поверхностного импеданса нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.04$.

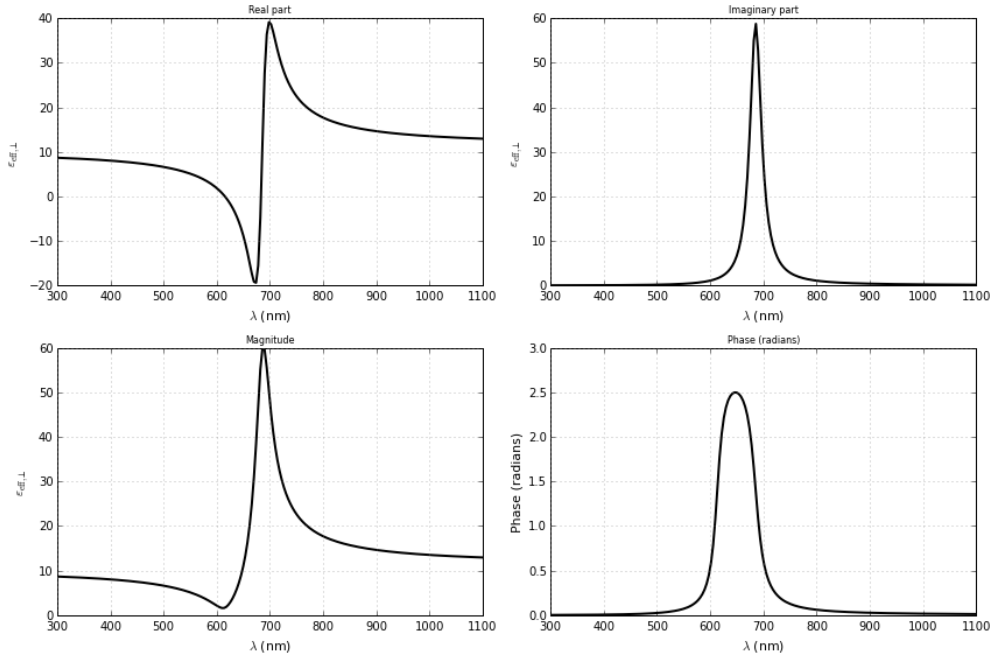



Рис. 14. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы поперечной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

На рис. 14 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы поперечной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

На рис. 15 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти,

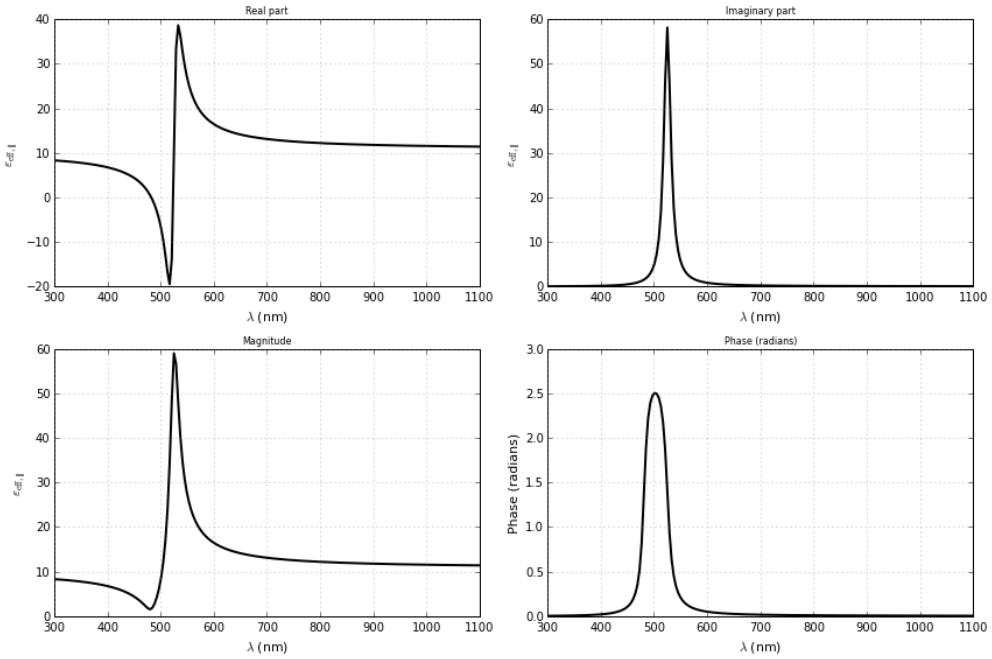



Рис. 15. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы продольной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

мнимой части, модуля, фазы продольной эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

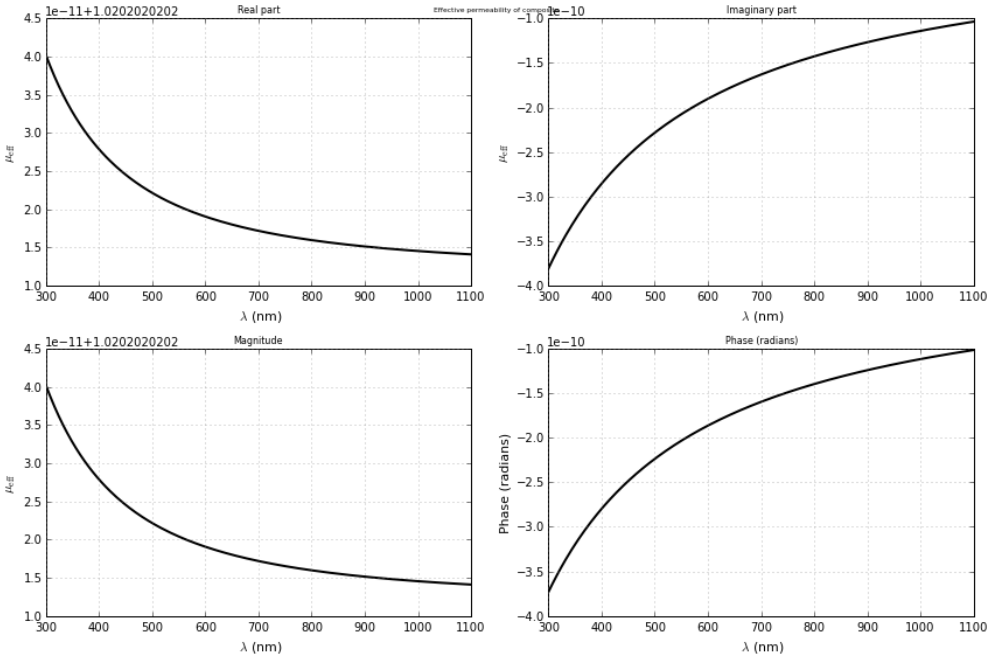



Рис. 16. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективной магнитной проницаемости нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

На рис. 16 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективной магнитной проницаемости нанокомпозита

из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

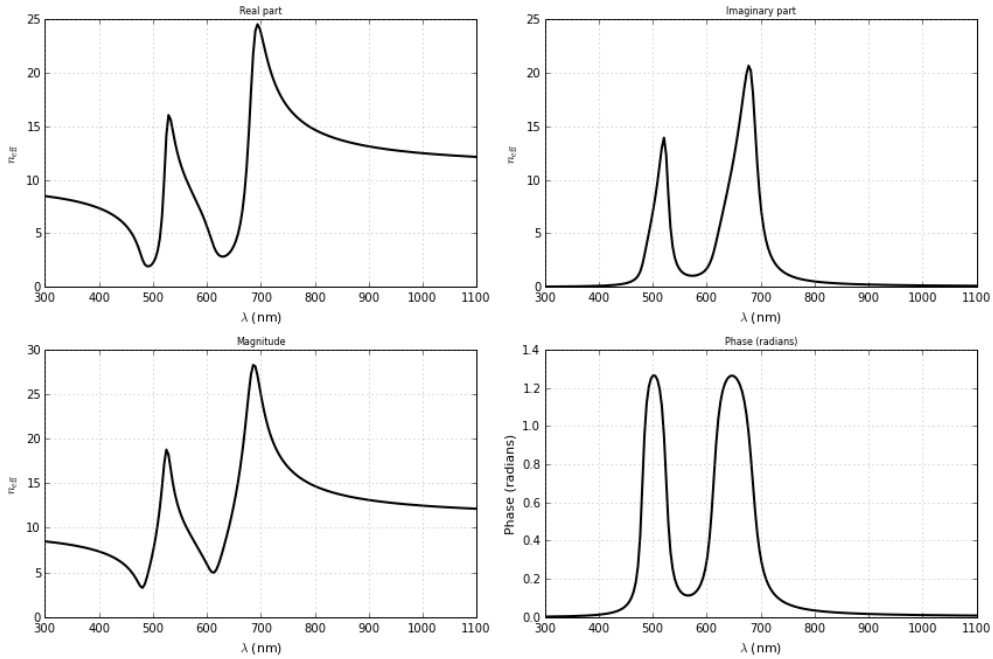



Рис. 17. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного показателя преломления нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

На рис. 17 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного показателя преломления нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

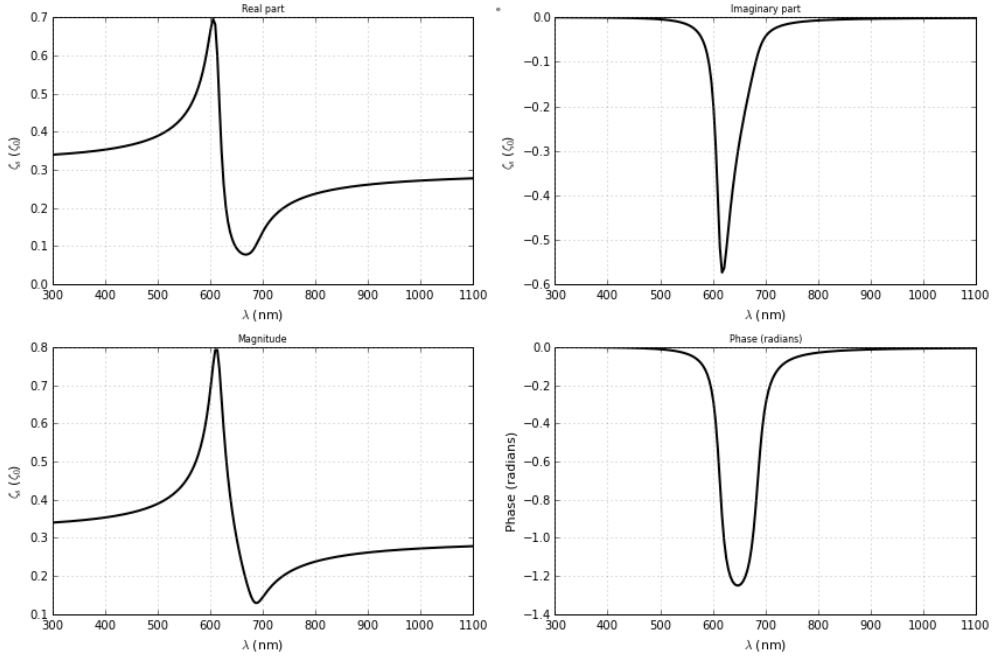



Рис. 18. Графики зависимостей действительной масти, мнимой части, модуля, фазы эффективного поверхностного импеданса нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

На рис. 18 приведено изображение графиков зависимостей действительной масти,

мнимой части, модуля, фазы эффективного поверхностного импеданса нанокомпозита из гиперболических метаматериалах с фактором заполнения $f = 0.06$.

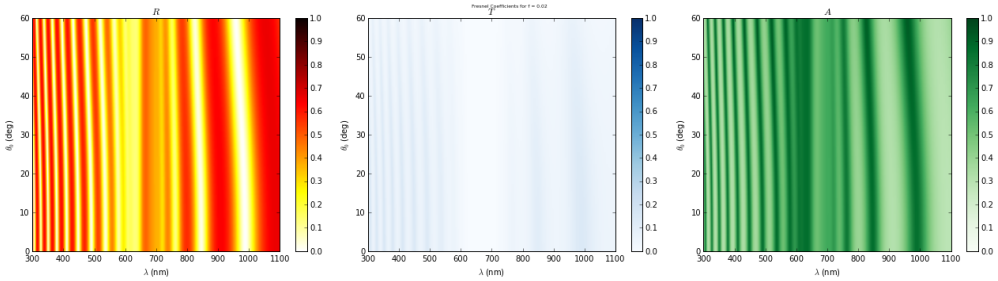


Рис. 19. Контурные графики зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.02$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

На рис. 19 приведено изображение контурных графиков зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.02$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

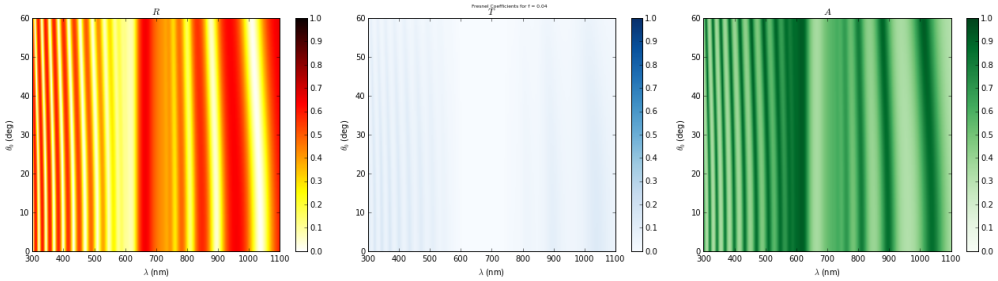


Рис. 20. Контурные графики зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.04$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

На рис. 20 приведено изображение контурных графиков зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.04$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

На рис. 21 приведено изображение контурных графиков зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.06$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

На рис. 22 приведено изображение графиков поверхностей для зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.02$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

На рис. 23 приведено изображение графиков поверхностей для зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.04$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

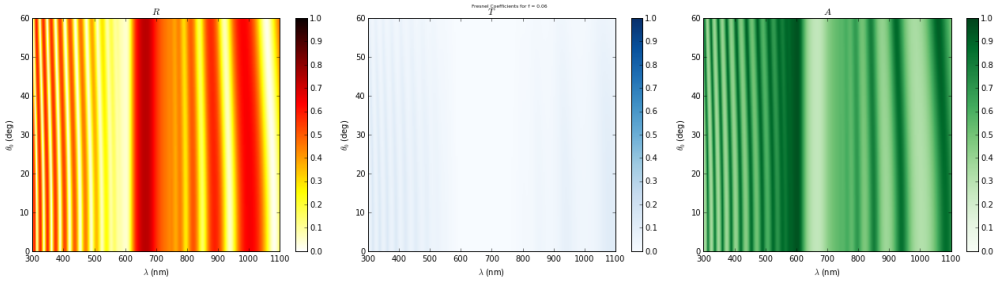


Рис. 21. Контурные графики зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.06$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

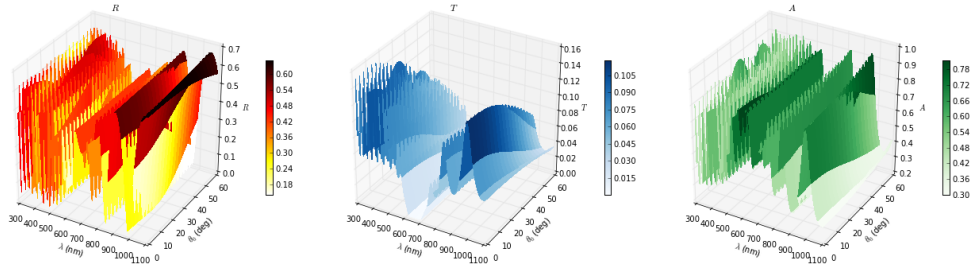


Рис. 22. Графики поверхностей для зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.02$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

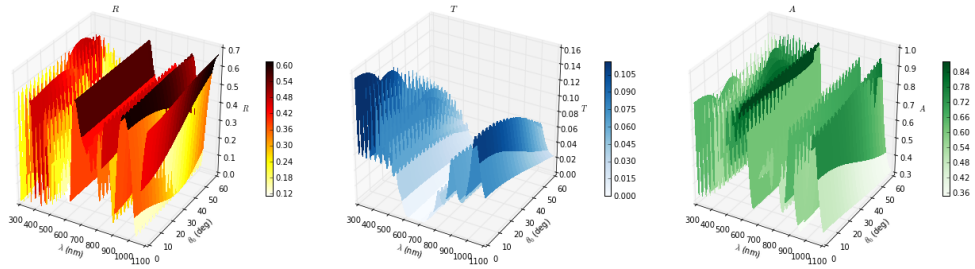


Рис. 23. Графики поверхностей для зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.04$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

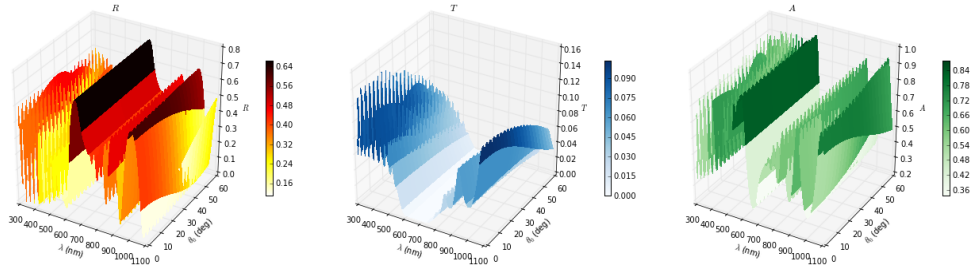


Рис. 24. Графики поверхностей для зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм с фактором заполнения $f = 0.06$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

На рис. 24 приведено изображение графиков поверхностей для зависимостей оптического отражения, пропускания и поглощения от плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750\,\text{нм}$ с фактором заполнения $f = 0.06$ от длины волны и угла падения оптического излучения.

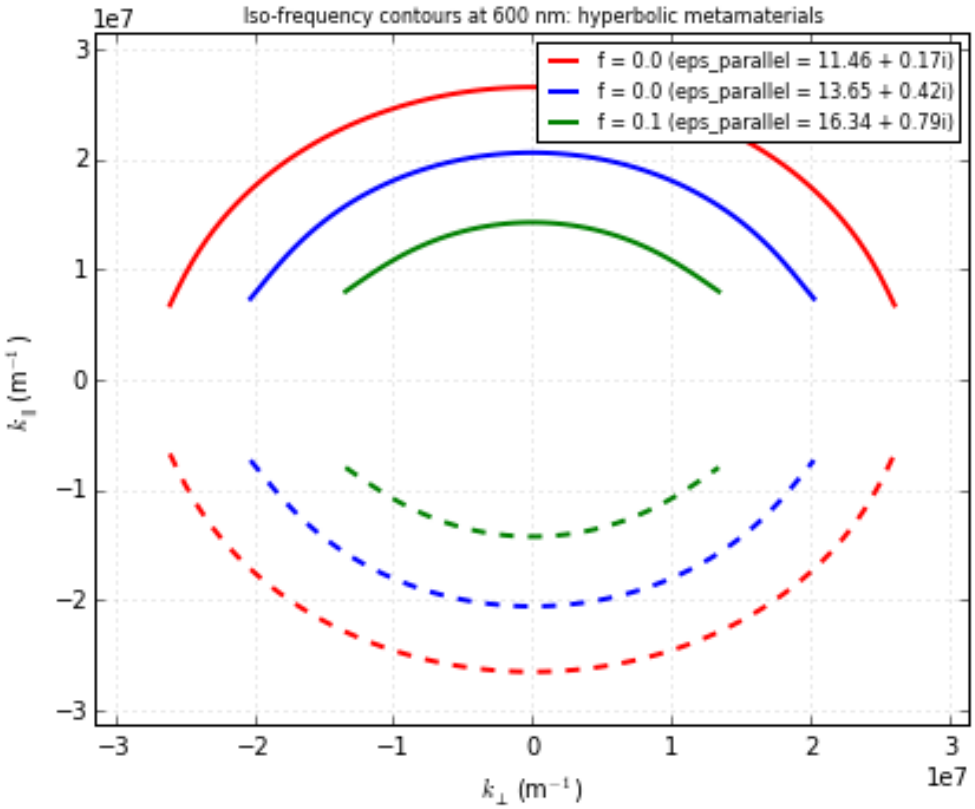



Рис. 25. Изолинии $k$-диаграмм для плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750\,\text{нм}$ при длине волны $\lambda = 600\,\text{нм}$.

На рис. 25 приведено изображение изолиний $k$-диаграмм для плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750\,\text{нм}$ при длине волны $\lambda = 600\,\text{нм}$.

На рис. 26 приведено изображение контурного графика максимального оптического поглощения плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750\,\text{нм}$ от фактора заполнения и длины волны излучения.

Компьютерная программа демонстрирует эффективность использования приближения Максвелл–Гарнетта для описания электромагнитных свойств нанокомпозитов на основе серебра в матрице оксида алюминия ($Al_2O_3$), что позволяет корректно моделировать анизотропные диэлектрические и магнитные характеристики гиперболических метаматериалов в оптическом диапазоне. Расчёты показывают, что эффективная продольная и поперечная диэлектрические проницаемости нанокомпозита сильно зависят от объёмной доли нановключений, проявляя как металлическую, так и диэлектрическую дисперсию в зависимости от длины волны излучения. Особое внимание заслуживает гиперболический режим, когда произведение продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей становится отрицательным ($\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel < 0$). Это подтверждается визуализацией изочастотных поверхностей в $k$-пространстве, где наблюдаются характерные ветвящиеся конусы, типичные для гиперболических метаматериалов. Такой режим открывает возможности для суперфокусировки света, подавления поверхностных плазмонных потерь и создания структур с уникальными направленными характеристиками излучения.

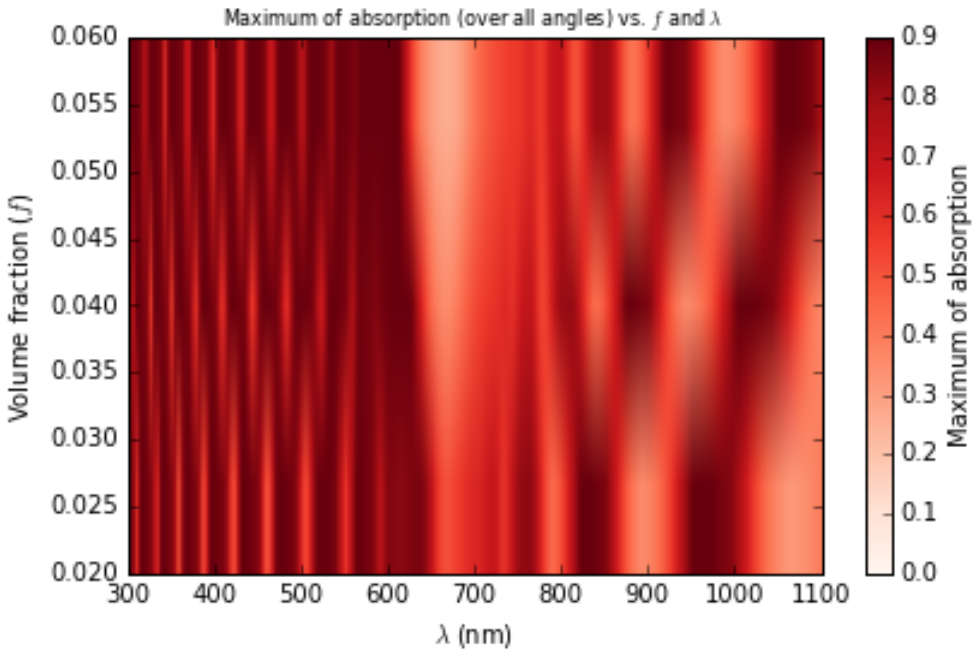



Рис. 26. Контурный график максимального оптического поглощения плёнки нанокомпозита из гиперболических метаматериалах толщиной $d = 750$ нм от фактора заполнения и длины волны излучения.

Анализ коэффициентов Френеля для оптического отражения $R$, пропускания $T$ и поглощения $A$ в зависимости от угла падения и длины волны излучения выявил нелинейные зависимости, обусловленные анизотропией эффективных параметров. Так, при увеличении объёмной доли металлических включений наблюдается рост поглощения в определённых спектральных диапазонах, что подтверждается картами максимального поглощения. Это позволяет оптимизировать структуру метаматериала для приложений в сенсорике, солнечной энергетике и оптоэлектронных устройствах на основе метаматериала.

Определение эффективного показателя преломления через геометрическое среднее продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей показало его сильную дисперсию, что согласуется с экспериментальными данными для подобных систем. Поверхностный импеданс, рассчитанный как функция длины волны и угла падения, является ключевым параметром для описания граничных условий в таких структурах и может использоваться в задачах проектирования метаповерхностей.

Визуализация результатов в виде двумерных карт, трёхмерных поверхностей и контурных графиков обеспечивает интуитивное понимание многообразия оптических режимов, доступных в гиперболических метаматериалах. Например, карты Френеля демонстрируют режим аномально высокого пропускания в определённых спектральных окнах, что может быть полезно для разработки оптических фильтров и световодов нового поколения.

Таким образом, представленная компьютерная программа является мощным инструментом для численного проектирования гиперболических метаматериалов, позволяющим связать их микроструктурные параметры (геометрия нановключений, объёмные доли) с макроскопическими оптическими свойствами. Результаты работы служат основой для дальнейших исследований в области планарной оптики, квантовой электроники и фотоники метаматериалов, где гиперболические метаматериалы демонстрируют уникальные возможности по управлению потоком света на наноуровне.

## Заключение

В работе проведено самосогласованное теоретическое и численное исследование оптических свойств гиперболических метаматериалов, а также численное моделирование оптических свойств плёнок гиперболического метаматериала в оптическом диапазоне. Получены аналитические выражения для эффективных параметров, показателя преломления и импеданса плёнки гиперболического метаматериала. Рассчитаны коэффициенты Френеля для плёнки на подложке. Рассчитаны эффективные параметры среды, показатель преломления, поверхностный импеданс и коэффициенты отражения, пропускания и поглощения.

Выводы по работе можно сформулировать следующим образом:

1. проанализированы оптические свойства гиперболических метаматериалов,
2. разработана электродинамическая модель гиперболических метаматериалов, учитывающая анизотропию, диссипацию и пространственную дисперсию, на основе которой получены аналитические выражения для тензора диэлектрической проницаемости, дисперсионных соотношений,
3. разработана численная модель оптических процессов в плёнках из гиперболического метаматериала, основанная на приближении Максвелл–Гарнетта,
4. проведены численные расчёты эффективных параметров среды таких, как показатель преломления, поверхностный импеданс, коэффициентов оптического отражения, пропускания, поглощения, подтвердившее корректность аналитических результатов,
5. показано, что гиперболические метаматериалы обладают уникальными оптическими свойствами: существованием $k$-мод с сверхвысокой плотностью фотонных состояний и сильным локальным усилением поля.

Гипотеза исследования, состоящая в том, что уникальные дисперсионные свойства гиперболических метаматериалов, обусловленные гиперболической формой изочастотной поверхности, приводят к качественно новым, по сравнению с обычными средами, режимам оптического отражения и пропускания, включая эффекты отрицательного рефракции, резкой угловой селективности и усиления ближнего поля, подтверждена полностью.

Задачи работы решены полностью.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании нового поколения оптических наноприборов, метаоптических устройств и сенсоров с заданными физическими характеристиками. В дальнейшем планируется расширение модели для учёта многослойных структур, исследование нелинейных эффектов и разработка методов синтеза гиперболических метаматериалов с заданными физическими свойствами.

### Список использованных источников

1. Davidovich M. V. Hyperbolic metamaterials: production, properties, applications, and prospects // Physics-Uspekhi. — 2019. — dec. — Vol. 62, no. 12. — P. 1173–1207. — URL: http://dx.doi.org/10.3367/ufne.2019.08.038643.

2. Hyperbolic metamaterials and metasurfaces: fundamentals and applications / Pengcheng Huo [et al.] // Advanced optical materials. — 2019. — apr. — Vol. 7, no. 14. — URL: http://dx.doi.org/10.1002/adom.201801616.

3. Hyperbolic metamaterials and their applications / Lorenzo Ferrari [et al.] // Progress in Quantum Electronics. — 2015. — mar. — Vol. 40. — P. 1–40. — URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.pquantelec.2014.10.001.

4. Shekhar Prashant, Atkinson Jonathan, Jacob Zubin. Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications // Nano convergence. — 2014. — june. — Vol. 1, no. 1. — URL: http://dx.doi.org/10.1186/s40580-014-0014-6.

5. Engineering transient hyperbolic metamaterials using InAsSb-based semiconductor / H. J. Haugan [et al.] // AIP Advances. — 2021. — july. — Vol. 11, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1063/5.0040294.

6. Yan Wei, Wubs Martijn, Mortensen N. Asger. Hyperbolic metamaterials: nonlocal response regularizes broadband supersingularity // Physical Review B. — 2012. — nov. — Vol. 86, no. 20. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.86.205429.

7. Subwavelength optics with hyperbolic metamaterials: waveguides, scattering, and optical topological transitions / Satoshi Ishii [et al.] // 2016 18th International conference on transparent optical networks (ICTON). — IEEE, 2016. — july. — P. 1–4. — URL: http://dx.doi.org/10.1109/icton.2016.7550461.

8. Anomalously weak scattering in metal-semiconductor multilayer hyperbolic metamaterials / Hao Shen [et al.] // Physical Review X. — 2015. — may. — Vol. 5, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/physrevx.5.021021.

9. Loss-compensated and active hyperbolic metamaterials / Xingjie Ni [et al.] // Optics Express. — 2011. — nov. — Vol. 19, no. 25. — P. 25242. — URL: http://dx.doi.org/10.1364/oe.19.025242.

10. Ballantine K. E., Donegan J. F., Eastham P. R. Conical diffraction and the dispersion surface of hyperbolic metamaterials // Physical Review A. — 2014. — july. — Vol. 90, no. 1. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.90.013803.

11. Broadband acoustic hyperbolic metamaterial / Chen Shen [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — dec. — Vol. 115, no. 25. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.254301.

12. Shekhar Prashant, Jacob Zubin. Strong coupling in hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2014. — july. — Vol. 90, no. 4. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.90.045313.

13. Hyperbolic metamaterials with Bragg polaritons / Evgeny S. Sedov [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — june. — Vol. 114, no. 23. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.237402.

14. Smolyaninov Igor I. Analog of gravitational force in hyperbolic metamaterials // Physical Review A. — 2013. — sept. — Vol. 88, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.88.033843.

15. Self-induced torque in hyperbolic metamaterials / Pavel Ginzburg [et al.] // Physical Review Letters. — 2013. — july. — Vol. 111, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.036804.

16. Casimir force between hyperbolic metamaterials / Ge Song [et al.] // Physical Review A. — 2017. — feb. — Vol. 95, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.95.023814.

17. Optical pulling forces in hyperbolic metamaterials / Alexander S. Shalin [et al.] // Physical Review A. — 2015. — june. — Vol. 91, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.91.063830.

18. Purcell effect in hyperbolic metamaterial resonators / Alexey P. Slobozhanyuk [et al.] // Physical Review B. — 2015. — Nov. — Vol. 92. — P. 195127. — URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.92.195127.

19. Topological photonic phase in chiral hyperbolic metamaterials / Wenlong Gao [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — jan. — Vol. 114, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.037402.

20. Biehs S. A., Tschikin M., Ben-Abdallah P. Hyperbolic metamaterials as an analog of a blackbody in the near field // Physical Review Letters. — 2012. — sept. — Vol. 109, no. 10. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.104301.

21. Radiative thermal diode via hyperbolic metamaterials / Qizhang Li [et al.] // Physical Review Applied. — 2021. — dec. — Vol. 16, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.064022.

22. Microscopic model of Purcell enhancement in hyperbolic metamaterials / Alexander N. Poddubny [et al.] // Physical Review B. — 2012. — july. — Vol. 86, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.86.035148.

23. Compton-like polariton scattering in hyperbolic metamaterials / Ivan V. Iorsh [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — may. — Vol. 114, no. 18. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.185501.

24. Papadakis Georgia T., Atwater Harry A. Field-effect induced tunability in hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2015. — nov. — Vol. 92, no. 18. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.92.184101.

25. Hyperbolic metamaterials based on multilayer graphene structures / Ivan V. Iorsh [et al.] // Physical Review B. — 2013. — feb. — Vol. 87, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.87.075416.

26. High-frequency homogenization for layered hyperbolic metamaterials / A. A. Krokhin [et al.] // Physical Review B. — 2016. — feb. — Vol. 93, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.93.075418.

27. Mirmoosa M. S., Kosulnikov S. Yu., Simovski C. R. Magnetic hyperbolic metamaterial of high-index nanowires // Physical Review B. — 2016. — aug. — Vol. 94, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.075138.

28. Anomalous resonances of an optical microcavity with a hyperbolic metamaterial core / Evgenij Travkin [et al.] // Physical Review B. — 2018. — may. — Vol. 97, no. 19. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.97.195133.

29. Miniaturizing optical antennas using hyperbolic metamaterial wires / Rafik Smaali [et al.] // Physical Review B. — 2017. — apr. — Vol. 95, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.155306.

30. Photonic Chern insulators made of gyromagnetic hyperbolic metamaterials / Ruei-Cheng Shiu [et al.] // Physical Review Materials. — 2020. — june. — Vol. 4, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.4.065202.

31. Vaianella Fabio, Maes Bjorn. Fano resonance engineering in slanted cavities with hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2016. — sept. — Vol. 94, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.125442.

32. Poddubny Alexander N., Iorsh Ivan V., Sukhorukov Andrey A. Generation of photon-plasmon quantum states in nonlinear hyperbolic metamaterials // Physical Review Letters. — 2016. — sept. — Vol. 117, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.123901.

33. Anomalously weak scattering in metal-semiconductor multilayer hyperbolic metamaterials / Hao Shen [et al.] // Physical Review X. — 2015. — may. — Vol. 5, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/physrevx.5.021021.

34. Zhang Yang, Zheng Li-Yang, Christensen Johan. Defect-immune sound radiation in a topologically nontrivial hyperbolic metamaterial // Physical Review Letters. — 2025. — apr. — Vol. 134, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.134.156602.

35. Second-harmonic double-resonance cones in dispersive hyperbolic metamaterials / Domenico de Ceglia [et al.] // Physical Review B. — 2014. — feb. — Vol. 89, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.89.075123.

36. Pustovit Vitaliy N., Urbas Augustine M., Zelmon David E. Surface plasmon amplification by stimulated emission of radiation in hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2016. — dec. — Vol. 94, no. 23. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.235445.

37. Miller Owen D., Johnson Steven G., Rodriguez Alejandro W. Effectiveness of thin films in lieu of hyperbolic metamaterials in the near field // Physical Review Letters. — 2014. — apr. — Vol. 112, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.157402.

38. Hyperbolic metamaterial nanoresonators make poor single-photon sources / Simon Axelrod [et al.] // Physical Review B. — 2017. — apr. — Vol. 95, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.155424.

39. Dispersionless gaps and cavity modes in photonic crystals containing hyperbolic metamaterials / Chun-hua Xue [et al.] // Physical Review B. — 2016. — mar. — Vol. 93, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.93.125310.

40. Magnetically tunable near-field radiative heat transfer in hyperbolic metamaterials / Jinlin Song [et al.] // Physical Review Applied. — 2020. — feb. — Vol. 13, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.13.024054.

41. Giant photoresponsivity of midinfrared hyperbolic metamaterials in the photon-assisted-tunneling regime / Pai-Yen Chen [et al.] // Physical Review Applied. — 2016. — apr. — Vol. 5, no. 4. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.5.041001.

42. Savoia Silvio, Castaldi Giuseppe, Galdi Vincenzo. Optical nonlocality in multilayered hyperbolic metamaterials based on Thue-Morse superlattices // Physical Review B. — 2013. — june. — Vol. 87, no. 23. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.87.235116.

43. Topological bands and triply degenerate points in non-Hermitian hyperbolic metamaterials / Junpeng Hou [et al.] // Physical Review Letters. — 2020. — feb. — Vol. 124, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.073603.

44. Sub-diffraction-limit imaging system with two interfacing hyperbolic metamaterials / Kirill Bronnikov [et al.] // Physical Review Applied. — 2021. — oct. — Vol. 16, no. 4. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.044054.

45. Kidwai Omar, Zhukovsky Sergei V., Sipe J. E. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials: strengths and limitations // Physical Review A. — 2012. — may. — Vol. 85, no. 5. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.85.053842.

46. Guclu Caner, Campione Salvatore, Capolino Filippo. Hyperbolic metamaterial as super absorber for scattered fields generated at its surface // Physical Review B. — 2012. — nov. — Vol. 86, no. 20. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.86.205130.

47. Redshift gaps in one-dimensional photonic crystals containing hyperbolic metamaterials / Feng Wu [et al.] // Physical Review Applied. — 2018. — dec. — Vol. 10, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.10.064022.

48. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity / D. R. Smith [et al.] // Physical Review Letters. — 2000. — May. — Vol. 84, no. 18. — P. 4184–4187. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4184.

49. Hyperbolic metamaterials / Alexander Poddubny [et al.] // Nature photonics. — 2013. — Nov. — Vol. 7, no. 12. — P. 948–957. — URL: http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2013.243.

50. Jacob Zubin, Smolyaninov Igor I., Narimanov Evgenii E. Broadband Purcell effect: radiative decay engineering with metamaterials // Applied Physics Letters. — 2012. — Apr. — Vol. 100, no. 18. — URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.4710548.

51. Johnson P. B., Christy R. W. Optical constants of the Noble metals // Physical Review B. — 1972. — Dec. — Vol. 6, no. 12. — P. 4370–4379. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.6.4370.

**Сведения об авторах:**

**Константин Константинович Алтунин** — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и технических дисциплин ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», Ульяновск, Россия.

E-mail: kostya_altunin@mail.ru
ORCID iD 0000-0002-0725-9416
Web of Science ResearcherID I-5739-2014
SCOPUS ID 57201126207
IstinaResearcherID 66185348

Original article
PACS 42.25.Bs
OCIS 160.3918
MSC 78A25

# Investigation of the optical properties of a hyperbolic metamaterial for the optical spectral range

K. K. Altunin

*Ulyanovsk State Pedagogical University, 432000, Ulyanovsk, Russia*

Submitted July 8, 2026
Resubmitted July 10, 2026
Published September 30, 2026

**Abstract.** The results of a theoretical and numerical study of the optical properties of a hyperbolic metamaterial for the optical spectral range are presented. Hyperbolic metamaterials constitute a class of anisotropic media in which one or two principal components of the permittivity tensor have a sign opposite to that of the remaining components. A model accounting for anisotropy, dissipation, and spatial dispersion was developed to derive analytical expressions for the permittivity tensor and dispersion relations. Additionally, a numerical model of optical processes in hyperbolic metamaterial films was created based on the Maxwell-Garnett approximation. Numerical calculations of effective medium parameters—such as the refractive index, surface impedance, and optical reflection, transmission, and absorption coefficients—were performed, confirming the validity of the analytical results. It is demonstrated that hyperbolic metamaterials exhibit strong local field enhancement.

**Keywords:** anisotropy, optical properties, plane electromagnetic wave, metamaterial, hyperbolic metamaterial, nanophotonics, reflection coefficient, transmission coefficient, effective medium approximation, local field enhancement

## References

1. Davidovich M. V. Hyperbolic metamaterials: production, properties, applications, and prospects // Physics-Uspekhi. — 2019. — dec. — Vol. 62, no. 12. — P. 1173–1207. — URL: http://dx.doi.org/10.3367/ufne.2019.08.038643.

2. Hyperbolic metamaterials and metasurfaces: fundamentals and applications / Pengcheng Huo [et al.] // Advanced optical materials. — 2019. — apr. — Vol. 7, no. 14. — URL: http://dx.doi.org/10.1002/adom.201801616.

3. Hyperbolic metamaterials and their applications / Lorenzo Ferrari [et al.] // Progress in Quantum Electronics. — 2015. — mar. — Vol. 40. — P. 1–40. — URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.pquantelec.2014.10.001.

4. Shekhar Prashant, Atkinson Jonathan, Jacob Zubin. Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications // Nano convergence. — 2014. — june. — Vol. 1, no. 1. — URL: http://dx.doi.org/10.1186/s40580-014-0014-6.

5. Anomalously weak scattering in metal-semiconductor multilayer hyperbolic metamaterials / Hao Shen [et al.] // Physical Review X. — 2015. — may. — Vol. 5, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/physrevx.5.021021.

6. Loss-compensated and active hyperbolic metamaterials / Xingjie Ni [et al.] // Optics Express. — 2011. — nov. — Vol. 19, no. 25. — P. 25242. — URL: http://dx.doi.org/10.1364/oe.19.025242.

7. Engineering transient hyperbolic metamaterials using InAsSb-based semiconductor / H. J. Haugan [et al.] // AIP Advances. — 2021. — july. — Vol. 11, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1063/5.0040294.

8. Yan Wei, Wubs Martijn, Mortensen N. Asger. Hyperbolic metamaterials: nonlocal response regularizes broadband supersingularity // Physical Review B. — 2012. — nov. — Vol. 86, no. 20. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.86.205429.

9. Subwavelength optics with hyperbolic metamaterials: waveguides, scattering, and optical topological transitions / Satoshi Ishii [et al.] // 2016 18th International conference on transparent optical networks (ICTON). — IEEE, 2016. — july. — P. 1–4. — URL: http://dx.doi.org/10.1109/icton.2016.7550461.

10. Ballantine K. E., Donegan J. F., Eastham P. R. Conical diffraction and the dispersion surface of hyperbolic metamaterials // Physical Review A. — 2014. — july. — Vol. 90, no. 1. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.90.013803.

11. Broadband acoustic hyperbolic metamaterial / Chen Shen [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — dec. — Vol. 115, no. 25. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.254301.

12. Shekhar Prashant, Jacob Zubin. Strong coupling in hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2014. — july. — Vol. 90, no. 4. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.90.045313.

13. Hyperbolic metamaterials with Bragg polaritons / Evgeny S. Sedov [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — june. — Vol. 114, no. 23. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.237402.

14. Smolyaninov Igor I. Analog of gravitational force in hyperbolic metamaterials // Physical Review A. — 2013. — sept. — Vol. 88, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.88.033843.

15. Self-induced torque in hyperbolic metamaterials / Pavel Ginzburg [et al.] // Physical Review Letters. — 2013. — july. — Vol. 111, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.036804.

16. Casimir force between hyperbolic metamaterials / Ge Song [et al.] // Physical Review A. — 2017. — feb. — Vol. 95, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.95.023814.

17. Optical pulling forces in hyperbolic metamaterials / Alexander S. Shalin [et al.] // Physical Review A. — 2015. — june. — Vol. 91, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.91.063830.

18. Purcell effect in hyperbolic metamaterial resonators / Alexey P. Slobozhanyuk [et al.] // Physical Review B. — 2015. — Nov. — Vol. 92. — P. 195127. — URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.92.195127.

19. Topological photonic phase in chiral hyperbolic metamaterials / Wenlong Gao [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — jan. — Vol. 114, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.037402.

20. Biehs S. A., Tschikin M., Ben-Abdallah P. Hyperbolic metamaterials as an analog of a blackbody in the near field // Physical Review Letters. — 2012. — sept. — Vol. 109, no. 10. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.104301.

21. Radiative thermal diode via hyperbolic metamaterials / Qizhang Li [et al.] // Physical Review Applied. — 2021. — dec. — Vol. 16, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.064022.

22. Microscopic model of Purcell enhancement in hyperbolic metamaterials / Alexander N. Poddubny [et al.] // Physical Review B. — 2012. — july. — Vol. 86, no. 3. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.86.035148.

23. Compton-like polariton scattering in hyperbolic metamaterials / Ivan V. Iorsh [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — may. — Vol. 114, no. 18. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.185501.

24. Papadakis Georgia T., Atwater Harry A. Field-effect induced tunability in hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2015. — nov. — Vol. 92, no. 18. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.92.184101.

25. Hyperbolic metamaterials based on multilayer graphene structures / Ivan V. Iorsh [et al.] // Physical Review B. — 2013. — feb. — Vol. 87, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.87.075416.

26. High-frequency homogenization for layered hyperbolic metamaterials / A. A. Krokhin [et al.] // Physical Review B. — 2016. — feb. — Vol. 93, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.93.075418.

27. Mirmoosa M. S., Kosulnikov S. Yu., Simovski C. R. Magnetic hyperbolic metamaterial of high-index nanowires // Physical Review B. — 2016. — aug. — Vol. 94, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.075138.

28. Anomalous resonances of an optical microcavity with a hyperbolic metamaterial core / Evgenij Travkin [et al.] // Physical Review B. — 2018. — may. — Vol. 97, no. 19. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.97.195133.

29. Miniaturizing optical antennas using hyperbolic metamaterial wires / Rafik Smaali [et al.] // Physical Review B. — 2017. — apr. — Vol. 95, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.155306.

30. Photonic Chern insulators made of gyromagnetic hyperbolic metamaterials / Ruei-Cheng Shiu [et al.] // Physical Review Materials. — 2020. — june. — Vol. 4, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.4.065202.

31. Vaianella Fabio, Maes Bjorn. Fano resonance engineering in slanted cavities with hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2016. — sept. — Vol. 94, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.125442.

32. Poddubny Alexander N., Iorsh Ivan V., Sukhorukov Andrey A. Generation of photon-plasmon quantum states in nonlinear hyperbolic metamaterials // Physical Review Letters. — 2016. — sept. — Vol. 117, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.123901.

33. Anomalously weak scattering in metal-semiconductor multilayer hyperbolic metamaterials / Hao Shen [et al.] // Physical Review X. — 2015. — may. — Vol. 5, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/physrevx.5.021021.

34. Zhang Yang, Zheng Li-Yang, Christensen Johan. Defect-immune sound radiation in a topologically nontrivial hyperbolic metamaterial // Physical Review Letters. — 2025. — apr. — Vol. 134, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.134.156602.

35. Second-harmonic double-resonance cones in dispersive hyperbolic metamaterials / Domenico de Ceglia [et al.] // Physical Review B. — 2014. — feb. — Vol. 89, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.89.075123.

36. Pustovit Vitaliy N., Urbas Augustine M., Zelmon David E. Surface plasmon amplification by stimulated emission of radiation in hyperbolic metamaterials // Physical Review B. — 2016. — dec. — Vol. 94, no. 23. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.235445.

37. Miller Owen D., Johnson Steven G., Rodriguez Alejandro W. Effectiveness of thin films in lieu of hyperbolic metamaterials in the near field // Physical Review Letters. — 2014. — apr. — Vol. 112, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.157402.

38. Hyperbolic metamaterial nanoresonators make poor single-photon sources / Simon Axelrod [et al.] // Physical Review B. — 2017. — apr. — Vol. 95, no. 15. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.155424.

39. Dispersionless gaps and cavity modes in photonic crystals containing hyperbolic metamaterials / Chun-hua Xue [et al.] // Physical Review B. — 2016. — mar. — Vol. 93, no. 12. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.93.125310.

40. Magnetically tunable near-field radiative heat transfer in hyperbolic metamaterials / Jinlin Song [et al.] // Physical Review Applied. — 2020. — feb. — Vol. 13, no. 2. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.13.024054.

41. Giant photoresponsivity of midinfrared hyperbolic metamaterials in the photon-assisted-tunneling regime / Pai-Yen Chen [et al.] // Physical Review Applied. — 2016. — apr. — Vol. 5, no. 4. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.5.041001.

42. Savoia Silvio, Castaldi Giuseppe, Galdi Vincenzo. Optical nonlocality in multilayered hyperbolic metamaterials based on Thue-Morse superlattices // Physical Review B. — 2013. — june. — Vol. 87, no. 23. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.87.235116.

43. Topological bands and triply degenerate points in non-Hermitian hyperbolic metamaterials / Junpeng Hou [et al.] // Physical Review Letters. — 2020. — feb. — Vol. 124, no. 7. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.073603.

44. Sub-diffraction-limit imaging system with two interfacing hyperbolic metamaterials / Kirill Bronnikov [et al.] // Physical Review Applied. — 2021. — oct. — Vol. 16, no. 4. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.044054.

45. Kidwai Omar, Zhukovsky Sergei V., Sipe J. E. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials: strengths and limitations // Physical Review A. — 2012. — may. — Vol. 85, no. 5. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.85.053842.

46. Guclu Caner, Campione Salvatore, Capolino Filippo. Hyperbolic metamaterial as super absorber for scattered fields generated at its surface // Physical Review B. — 2012. — nov. — Vol. 86, no. 20. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.86.205130.

47. Redshift gaps in one-dimensional photonic crystals containing hyperbolic metamaterials / Feng Wu [et al.] // Physical Review Applied. — 2018. — dec. — Vol. 10, no. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.10.064022.

48. Розенберг Г. В. Оптика тонкослойных покрытий. — Москва : Физматгиз, 1958. — 572 с.

49. M. Born, E. Wolf. Principles of optics. — Oxford : Pergamon Press, 1969. — 720 p.

50. Johnson P. B., Christy R. W. Optical constants of the Noble metals // Physical Review B. — 1972. — Dec. — Vol. 6, no. 12. — P. 4370–4379. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.6.4370.

51. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity / D. R. Smith [et al.] // Physical Review Letters. — 2000. — May. — Vol. 84, no. 18. — P. 4184–4187. — URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4184.

52. Hyperbolic metamaterials / Alexander Poddubny [et al.] // Nature photonics. — 2013. — Nov. — Vol. 7, no. 12. — P. 948–957. — URL: http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2013.243.

53. Jacob Zubin, Smolyaninov Igor I., Narimanov Evgenii E. Broadband Purcell effect: radiative decay engineering with metamaterials // Applied Physics Letters. — 2012. — Apr. — Vol. 100, no. 18. — URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.4710548.

**Information about authors:**

**Konstantin Konstantinovich Altunin** — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics and Technical Disciplines of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Ulyanovsk State Pedagogical University”, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: kostya_altunin@mail.ru

ORCID iD 0000-0002-0725-9416

Web of Science ResearcherID I-5739-2014

SCOPUS ID 57201126207

IstinaResearcherID 66185348