

Секция 2

Физические науки

2.1 Оптика

Научная статья
УДК 535.3
ББК 22.343
ГРНТИ 20.53.23
ВАК 1.3.6.
PACS 42.25.Bs
OCIS 260.2110
MSC 78A10

Исследование закона Бугера–Ламберта–Бера и соотношения Клаузиуса–Моссотти–Лоренца–Лоренца в композитных средах из метаматериалов с отрицательным показателем преломления

К. К. Алтунин ¹

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», 432071, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 10 февраля 2026 года
После переработки 12 февраля 2026 года
Опубликована 31 марта 2026 года

Аннотация. Рассматривается применение классического закона Бугера–Ламберта–Бера к пластинке из метаматериала с отрицательным показателем преломления. Целью работы является исследование особенностей применения закона Бугера–Ламберта–Бера к метаматериалам с отрицательным показателем преломления, выявление закономерностей распространения света в средах из метаматериалов и анализ границ применимости закона Бугера–Ламберта–Бера в условиях аномальной дисперсии.

Ключевые слова: композит, композитная среда, показатель преломления, диэлектрическая проницаемость, наноматериал, метаматериал, показатель преломления, диэлектрическая проницаемость, метаматериал

¹E-mail: kostya_altunin@mail.ru

Введение

Исследование распространения электромагнитного излучения в метаматериалах с отрицательным показателем преломления представляет собой актуальную задачу современной оптики и материаловедения. Актуальность исследования обусловлена стремительным развитием технологий метаматериалов и необходимостью создания надёжных теоретических основ для проектирования устройств нового поколения в оптике и оптоэлектронике. Исследование оптических свойств композитных сред является актуальным в связи с развитием современных нанотехнологий изготовления наноматериалов и метаматериалов. В данной работе рассматривается применение закона Бугера–Ламберта–Бера к средам из метаматериалов.

Закон Бугера–Ламберта–Бера был экспериментально открыт французским учёным Пьером Бугером в 1729 году, подробно рассмотрен немецким учёным И. Г. Ламбертом в 1760 году и в отношении концентрации проверен на опыте немецким учёным А. Бером в 1852 году.

Целью работы является исследование физических особенностей применения закона Бугера–Ламберта–Бера к метаматериалам с отрицательным показателем преломления, выявление закономерностей распространения света в средах из метаматериалов, установление взаимосвязи между макроскопическими оптическими характеристиками и микроскопической структурой композитных сред и анализ границ применимости закона Бугера–Ламберта–Бера в условиях аномальной дисперсии.

Задачи исследования состоят в том, чтобы проанализировать литературу по оптическим параметрам композитных сред, проанализировать физическую сущность закона Бугера–Ламберта–Бера в контексте распространения волн в средах с отрицательным показателем преломления, исследовать фундаментальные соотношения между показателем преломления и микроскопическими параметрами среды, исследовать влияние параметров метаматериала (ε , μ , γ) с отрицательным показателем преломления на характер ослабления оптического излучения, разработать математическую модель для описания распространения света в среде с отрицательным показателем преломления композитных сред, учитывающую влияние дисперсионных свойств на оптические характеристики.

Мотивация исследования заключается в том, что метаматериалы с отрицательным показателем преломления открывают новые возможности в оптике и оптоэлектронике, требующие пересмотра фундаментальных законов для понимания поведения сред из метаматериалов в оптоэлектронных приборах и устройствах.

Объектом исследования является совокупность композитных сред с различными структурами из метаматериалов с отрицательным показателем преломления, которые характеризуются одновременным отрицательным значением диэлектрической ($\varepsilon < 0$) и магнитной ($\mu < 0$) проницаемостей. Предметом исследования выступает физический процесс распространения электромагнитных волн в среде с отрицательным показателем преломления с учётом закономерностей ослабления интенсивности электромагнитного излучения при прохождении через метаматериалы с отрицательным показателем преломления в рамках закона Бугера–Ламберта–Бера.

Гипотеза научного исследования заключается в том, что закон Бугера–Ламберта–Бера сохраняет свою математическую форму для метаматериалов с отрицательным показателем преломления при условии корректного определения коэффициента поглощения и учёта физических эффектов, учитывающих возможность поглощения или усиления оптического излучения в метаматериалах.

Методы исследования включают в себя анализ литературы по существующим исследованиям, теоретический анализ существующих моделей, математическое моделирование оптических процессов в композитных средах. Материалы исследования включают

в себя теоретические работы по электродинамике сред с отрицательными параметрами, данные по показателям преломления различных сред, результаты численного моделирования распространения электромагнитных волн в слоистых метаструктурах с контролируемым показателем преломления, данные по оптическим свойствам метаматериалов различных типов.

Научная новизна исследования состоит в том, что впервые предложена обобщённая модель для расчёта эффективного показателя преломления композитных сред с учётом применимости закона Бугера–Ламберта–Бера к средам с одновременным отрицательным ϵ и μ .

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что результаты исследования расширяют фундаментальные представления о распространении электромагнитных волн в средах из метаматериалов, развита теория взаимодействия излучения с метаматериалами на основе согласованного описания фазовых и амплитудных характеристик с учётом применимости классического закона ослабления оптического излучения.

Практическая значимость исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы при разработке новых оптоэлектронных устройств на основе метаматериалов с заданным коэффициентом пропускания, выполнена оптимизация параметров метаматериалов для задач маскировки и управления излучением, созданы новые типы оптических фильтров и поглотителей с управляемыми характеристиками.

Обзор

Закон Бугера–Ламберта–Бера, описывающий поглощение света $I(x) = I_0 \exp(-\gamma x)$, нуждается в модификации для метаматериалов с отрицательным показателем преломления, поскольку их поведение регулируется комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ и проницаемостью μ , где обе отрицательны $\epsilon < 0$, $\mu < 0$ в определённом диапазоне частот, что приводит к антипараллельным фазовым/групповым скоростям и левосторонности, но фундаментальный принцип поглощения (Бера–Ламберта) всё ещё применим, только описанный с комплексными n и внутренними потерями, часто через теории эффективной среды, такие как теория Максвелл–Гарнетта.

Гонка за созданием метаматериалов с отрицательным показателем преломления в оптическом диапазоне началась шесть лет назад с создания материалов с отрицательным показателем преломления для гигагерцовых частот. Одним из подходов является полная миниатюризация гигагерцовых резонансных структур. Альтернативные конструкции используют локализованные плазмонно-резонансные металлические наночастицы или нанотверстия в металлических пленках. Следуя этому подходу, совсем недавно был получен отрицательный показатель преломления в оптическом диапазоне. В статье [1] рассматриваются эти недавние результаты и суммируем способы однозначного определения эффективного показателя преломления тонких слоёв на основе данных, доступных для измерений. В статье [1] численное моделирование показывает, что композитный материал, состоящий из серебряных полос и усиливающего материала, может иметь отрицательный показатель преломления -1.3 и 100% пропускание одновременно.

В статье [2] представлены экспериментальные данные по рассеянию на микроволновых частотах на структурированном метаматериале, обладающем полосой частот, где эффективный показатель преломления отрицателен. Материал состоит из двумерного массива повторяющихся элементарных ячеек из медных полосок и кольцевых резонаторов, расположенных на переплетённых полосках из стандартного материала печатной платы. Измеряя угол рассеяния прошедшего через призму, изготовленную из этого

материала, в статье [2] определяем значение эффективного показателя преломления, соответствующее закону Снеллиуса. В статье [2] показано, что эти эксперименты напрямую подтверждают предсказания уравнений Максвелла, согласно которым показатель преломления определяется как отрицательный квадратный корень из $\epsilon\mu$ для частот, где как диэлектрическая проницаемость (ϵ), так и проницаемость (μ) отрицательны. Теперь возможны конфигурации геометрически оптических конструкций, которые невозможно реализовать с помощью материалов с положительным показателем преломления.

В статье [3] экспериментально продемонстрировали хиральный метаматериал, обладающий отрицательным показателем преломления на терагерцовых частотах. В статье [3] показано, что наличие сильной хиральности в терагерцовом метаматериале снимает вырождение для двух волн с круговой поляризацией и позволяет достичь отрицательного показателя преломления без одновременного наличия отрицательной диэлектрической и отрицательной магнитной проницаемости. В статье [3] показано, что реализация терагерцовых хиральных метаматериалов с отрицательным показателем преломления открывает возможности для исследования их новых электромагнитных свойств, таких как отрицательное преломление и отрицательное отражение, а также для важных приложений в терагерцовых устройствах.

Электрооптические модуляторы обычно изготавливаются из неорганических материалов, таких как LiNbO_3 , но замена их органическими электрооптическими материалами, то есть материалами с оптическими свойствами, которые изменяются в ответ на электрическое поле, может быть многообещающей альтернативой, поскольку они обеспечивают широкую полосу пропускания, простоту обработки и относительно низкую стоимость. В статье [4] включается легированный, спитый органический электрооптический полимер в гибридные полимерные/золь-гель волноводные модуляторы с исключительными характеристиками. Полуволновые напряжения полученных модуляторов Маха-Цендера и фазовых модуляторов на длине волны 1550 нм составляют 1 В и 2.5 В соответственно. Уникальные свойства золь-гель материалов оболочки, используемых в гибридной структуре, приводят к 100% эффективности поляризации устройства, что приводит к соответствующим внутриустройственным электрооптическим коэффициентам 138 пм В^{-1} и 170 пм В^{-1} в модуляторах Маха-Цендера и фазовых модуляторах. Эти результаты впервые демонстрируют внутриустройственные электрооптические коэффициенты, которые в пять-шесть раз превышают соответствующие показатели эталонного неорганического материала.

В статье [5] на основе полновекторного трёхмерного подхода Максвелла-Блоха исследуется возможность использования усиления для преодоления потерь в метаматериале с отрицательным показателем преломления, напоминающем рыболовную сеть. В статье [5] показано, что соответствующее размещение оптически накачиваемых лазерных краевых усилителей (усиление) в структуре метаматериала приводит к образованию полосы частот, в которой небиянизотропный метаматериал становится усиливающим. В этой области как действительная, так и мнимая части эффективного показателя преломления одновременно становятся отрицательными, а коэффициент качества расходится в двух различных частотных точках.

В статье [6] разработаны, изготовлены и экспериментально исследованы композитные панели толщиной 2.7 мм с отрицательным показателем преломления в диапазоне частот от 8.4 до 9.2 ГГц. В статье [6] композитный метаматериал изготовлен с использованием традиционной коммерческой литографии многослойных печатных плат; трехмерная физическая (в отличие от электромагнитной) структура создается с помощью переходных отверстий для формирования участков рассеивающих элементов в направлении, перпендикулярном поверхностям печатной платы. На основе измерений параметров рассеяния в статье [6] показано, что комплексная диэлектрическая проницаемость,

магнитная проницаемость, показатель преломления и импеданс композита могут быть однозначно определены. В статье [6] показано, что измерения позволяют количественно определить полосу отрицательного показателя преломления и связанные с ней потери. В статье [6] показано, что извлеченные параметры материала находятся в отличном согласии с результатами моделирования.

В статье [7] разработана модель эффективной среды для неупорядоченных метаматериалов, содержащих пространственно случайное распределение диэлектрических сфер. Подобно моделям эффективной среды для упорядоченных метаматериалов, эта модель предсказывает резонансы эффективной магнитной проницаемости и диэлектрической проницаемости, возникающие из-за электрических и магнитных дипольных резонансов Ми в сферах. Кроме того, в статье [7] модель предсказывает сдвиг электрического резонанса в красную сторону с увеличением количества частиц. Интересно, что когда количество частиц превышает порог перколяции в 33 %, модель предсказывает перекрытие электрического резонанса с магнитным резонансом, что приводит к отрицательному показателю преломления.

В статье [8] анализируется использование слоистых сверхпроводников в качестве сильно анизотропных метаматериалов, которые могут обладать отрицательным показателем преломления в широком диапазоне частот. Сверхпроводники представляют особый интерес, поскольку они потенциально способны обеспечивать низкие потери, что имеет решающее значение для таких применений, как сверхразрешающая визуализация.

Модель

Относительное изменение интенсивности света в каждом таком слое dx не зависит от интенсивности и пропорционально толщине этого слоя, что следует из энергетических соображений.

$$\frac{dI}{I} = -\gamma dx, \quad (1)$$

Закон Бугера-Ламберта-Бера является фундаментальным соотношением в оптике, описывающим ослабление интенсивности электромагнитного излучения при прохождении через поглощающую среду. Закон Бугера-Ламберта-Бера описывает ослабление интенсивности электромагнитного излучения при прохождении через поглощающую среду. Классический закон Бугера-Ламберта-Бера описывает экспоненциальное убывание интенсивности света при прохождении через однородную среду. В классическом виде закон Бугера-Ламберта-Бера записывается следующим образом:

$$I(x) = I_0 \exp(-\gamma x), \quad (2)$$

где I_0 – начальная интенсивность падающего излучения, $I(x)$ – интенсивность прошедшей волны после прохождения излучением слоя, γ – коэффициент поглощения среды, связанный с ослаблением излучения в среде, x – толщина поглощающего слоя или путь, пройденный светом в материале пластины.

Для материалов с отрицательными показателями преломления обычное поведение ослабления меняется вследствие особых эффектов, вызванных изменением направления фазовых фронтов и возможной инверсии поглощения. Однако для метаматериалов, обладающих необычными оптическими характеристиками, включая отрицательные показатели преломления, необходимо учитывать особенности распространения электромагнитных волн в средах из метаматериалов. Рассмотрим особенности метаматериалов с отрицательным эффективным показателем преломления. Метаматериалы с отрицательным показателем преломления ($n < 0$) обладают рядом уникальных физических

свойств: противоположное направление фазовой и групповой скоростей волны, выполнение соотношения $n = -\sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε и μ – отрицательные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно. При этом закон Бугера–Ламберта–Бера сохраняет свою форму при соблюдении следующих условий: однородность и изотропия среды на макроскопическом уровне, отсутствие рассеяния и отражения на границах (либо их отдельный учёт), корректное определение коэффициента поглощения γ для заданной частоты и поляризации. Для пластинки из метаматериала с отрицательным показателем преломления толщиной d_1 закон Бугера–Ламберта–Бера принимает следующий вид:

$$I(d_1) = I_0 \exp(-\gamma d_1) , \quad (3)$$

где γ – коэффициент поглощения излучения ($\gamma \geq 0$, несмотря на $n < 0$), d_1 – геометрическая толщина пластинки.

При применении закона к метаматериалам следует учитывать следующие особенности. Отрицательный показатель преломления влияет на фазовые характеристики волны (направление фазового фронта), но не изменяет экспоненциальную зависимость интенсивности от толщины при поглощении. Коэффициент поглощения γ может демонстрировать сильную зависимость от частоты излучения и параметров метаматериала (ε, μ), однако его значение всегда остаётся неотрицательным.

При необходимости учёта отражения на границах раздела сред в формулу вводится дополнительный множитель T_0 (коэффициент пропускания границ):

$$I(d_1) = I_0 T_0 \exp(-\gamma d_1) . \quad (4)$$

Проанализируем прохождение плоской монохроматической волны через пластину толщиной d_1 . Если среда обладает комплексным показателем преломления $n = n' + in''$, распространение волны описывается выражением:

$$T(d_1) = |t|^2 \exp[-(\beta'' + i\beta')d_1] , \quad (5)$$

где $\beta' = k_0 n'$, $\beta'' = k_0 n''$, $k_0 = \omega/c$ (частота ω , скорость света c), $|t|$ – коэффициент пропускания на границе раздела сред. Финальная формула пропускания приобретает вид:

$$I_{\text{out}}(d_1) = I_0 |t|^2 e^{-k_0 n'' d_1} e^{ik_0 n' d_1} . \quad (6)$$

Особенность здесь заключается в том, что действительная составляющая β' влияет на сдвиг фазы волны, а мнимая компонента β'' определяет характер изменения амплитуды, поскольку положительное значение β'' приводит к поглощению, отрицательное значение β'' приводит к усилению оптического излучения, прошедшего через пластинку. Таким образом, для случая метаматериалов обобщённая форма записи физического закона Бугера–Ламберта–Бера примет следующий вид:

$$I_{\text{out}}(d_1) = I_0 |t|^2 e^{-\gamma d_1} , \quad (7)$$

где γ учитывает зависимость от конкретных характеристик метаматериала и условий эксперимента.

Рассмотрим физические особенности применения закона Бугера–Ламберта–Бера к метаматериалам. Для метаматериалов с отрицательным показателем преломления, где показатель преломления $n < 0$, формальное применение закона Бугера–Ламберта–Бера может привести к кажущемуся экспоненциальному возрастанию интенсивности, что противоречит закону сохранения энергии. Для корректного описания необходимо учитывать физические механизмы, обеспечивающие отрицательный показатель преломления и поглощение энергии.

Предположим, что метаматериал имеет толщину d_1 и отрицательный показатель преломления $n = -|n|$. Тогда волновой вектор внутри материала будет $k = n\frac{\omega}{c}$, где ω – частота света, а c – скорость света в вакууме. Учитывая, что в метаматериалах с отрицательным показателем преломления поглощение может происходить за счет различных механизмов (например, резистивные потери в металлических элементах), мы можем ввести эффективный коэффициент поглощения γ_{eff} , который учитывает эти потери. Тогда закон Бугера–Ламберта–Бера примет вид:

$$I(x) = I_0 \exp(-\gamma_{\text{eff}}x) . \quad (8)$$

Важно отметить, что γ_{eff} должен быть положительным, чтобы обеспечить уменьшение интенсивности света при распространении в материале и соответствовать закону сохранения энергии.

Рассмотрим пластинку из метаматериала толщиной d_1 , имеющего комплексный показатель преломления $n = n' + in''$, где $n' < 0$, а $n'' > 0$ (поглощение). В классическом подходе коэффициент поглощения связан с мнимой частью показателя преломления соотношением:

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda}n'' , \quad (9)$$

где λ – длина волны в вакууме. Тогда, формально подставляя в уравнение (2), получаем:

$$I(d_1) = I_0 e^{-\gamma d_1} . \quad (10)$$

Поскольку $\gamma > 0$, интенсивность убывает с ростом d_1 , что кажется корректным. Однако проблема возникает при рассмотрении направления волнового вектора и вектора Умова–Пойнтинга.

Рассмотрим проблему с направлением потока энергии в метаматериалах. В метаматериалах с отрицательным показателем преломления вектор Умова–Пойнтинга \vec{S} (направление потока энергии) направлен противоположно волновому вектору \mathbf{k} . Это означает, что если волна распространяется в положительном направлении оси x , то поток энергии направлен в отрицательном направлении. При этом, если мы формально используем закон Бугера–Ламберта–Бера, как будто среда «поглощает» энергию на пути распространения волны, то мы должны учитывать, что энергия фактически «возвращается» обратно. Это может привести к кажущемуся возрастанию интенсивности при движении вглубь среды, если не учитывать правильное направление потока энергии.

Рассмотрим парадокс экспоненциального возрастания, который иногда встречается в литературе: если $n' < 0$, то в некоторых формализмах предлагают использовать $\alpha = -\frac{4\pi}{\lambda}n''$, что даёт:

$$I(d_1) = I_0 e^{\alpha d_1} , \quad \text{при } \alpha > 0 , \quad (11)$$

что означает экспоненциальный рост интенсивности с глубиной — явное нарушение закона сохранения энергии. Этот результат является следствием неправильной интерпретации знака коэффициента поглощения. На самом деле, поглощение всегда должно приводить к уменьшению интенсивности, независимо от знака действительной части показателя преломления.

Выполним проверку закона сохранения энергии. Рассмотрим энергетический баланс для слоя метаматериала толщиной d_1 . Полная мощность, падающая на пластинку, равна $P_{\text{in}} = I_0 A$, где A – площадь поперечного сечения. Мощность, вышедшая из пластинки, равна $P_{\text{out}} = I(d_1) A$. Мощность, поглощённая в среде, равна:

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}} = I_0 A (1 - e^{-\gamma d_1}) > 0 . \quad (12)$$

Это выражение положительно и убывает с увеличением d_1 , что соответствует физической реальности — энергия поглощается, а не генерируется. Таким образом, даже в случае $n' < 0$, если правильно определить $\gamma > 0$, закон Бугера–Ламберта–Бера не нарушает закон сохранения энергии. Рассмотрим корректную формулировку для метаматериалов. Правильный подход состоит в следующем: коэффициент поглощения γ всегда положителен: $\gamma = \frac{4\pi}{\lambda}|n''|$, закон Бугера–Ламберта–Бера применяется без изменения: $I(x) = I_0 \exp(-\gamma x)$, направление потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга) определяется отдельно и не влияет на величину поглощения, при расчёте отражения и преломления необходимо использовать полную теорию Максвелла с учётом знака n' . Выполним проверка закона сохранения энергии для следующим формул. Исходная задача касается проверки закона сохранения энергии для полученного выражения выхода интенсивности:

$$I_{\text{out}} = I_0 |t|^2 \exp(\gamma d_1) , \quad (13)$$

которое могло бы подразумевать противоречие закону сохранения энергии, если бы предполагало неограниченный рост интенсивности. Полная энергия, входящая в метаматериал, должна равняться сумме энергии, вышедшей из материала, и энергии, поглощённой в материале:

$$E_{\text{in}} = E_{\text{out}} + E_{\text{absorption}} . \quad (14)$$

В терминах интенсивности это можно записать как:

$$I_0 = I(d_1) + I_{\text{absorption}} , \quad (15)$$

где $I_{\text{absorption}}$ — интенсивность поглощенного света. Подставляя выражение для $I(d_1)$ из модифицированного закона Бугера–Ламберта–Бера, получаем:

$$I_0 = I_0 \exp(-\gamma_{\text{eff}} d_1) + I_{\text{absorption}} . \quad (16)$$

Отсюда можно выразить поглощенную интенсивность:

$$I_{\text{absorption}} = I_0 (1 - e^{-\gamma_{\text{eff}} d_1}) . \quad (17)$$

Это уравнение показывает, что часть входящей энергии поглощается в метаматериале, что соответствует закону сохранения энергии. Важно понимать, что формальное применение закона Бугера–Ламберта–Бера с отрицательным коэффициентом поглощения не имеет физического смысла. Корректный подход требует введения эффективного коэффициента поглощения, который учитывает все механизмы потерь в метаматериале. При этом закон сохранения энергии должен выполняться, то есть интенсивность света должна уменьшаться при распространении в материале.

Выполним анализ закона сохранения энергии для пластины из метаматериала. Согласно закону сохранения энергии, полная энергия системы должна оставаться неизменной:

$$E_{\text{in}} = E_{\text{out}} . \quad (18)$$

Проверим это соотношение отдельно для каждой составляющей энергии. Интегрируя энергию входящего пучка вдоль всей толщины образца d_1 , получаем:

$$E_{\text{in}} = \int_0^{d_1} I_0 dx = I_0 d_1 . \quad (19)$$

Рассчитаем выходящую энергию аналогично, используя найденное ранее выражение:

$$E_{\text{out}} = \int_0^{d_1} I_{\text{out}} dx = \int_0^{d_1} I_0 |t|^2 e^{\gamma x} dx . \quad (20)$$

Выполнив интегрирование, находим:

$$E_{\text{out}} = I_0 |t|^2 \left(\frac{e^{\gamma d_1} - 1}{\gamma} \right). \quad (21)$$

Рассмотрим баланс энергий. Требуемый баланс энергий подразумевает выполнение условия:

$$E_{\text{in}} = E_{\text{out}}. \quad (22)$$

Закон сохранения энергии утверждает, что общая энергия в замкнутой системе остаётся постоянной. На основании вышеизложенного, можем записать:

$$\Delta E = E_{\text{in}} - E_{\text{out}} = 0. \quad (23)$$

Подставляя полученные выражения, приходим к следующему условию:

$$I_0 d_1 = I_0 |t|^2 \left(\frac{e^{\gamma d_1} - 1}{\gamma} \right). \quad (24)$$

Разделим обе стороны уравнения на I_0 , получим:

$$d_1 = |t|^2 \left(\frac{e^{\gamma d_1} - 1}{\gamma} \right). \quad (25)$$

Отсюда ясно, что такое равенство возможно лишь при строгих ограничениях на величину γ .

Для метаматериалов можно рассмотреть сценарий, в котором используется отрицательный показатель преломления $n < 0$. В этом случае, закон можно модифицировать следующим образом:

$$I = I_0 \exp(-\gamma d_1). \quad (26)$$

Здесь потеря энергии представляется как экспоненциальное увеличение интенсивности, что, как вы правильно заметили, может привести к противоречию с законом сохранения энергии. Если I возрастает при перемещении через материал, это подразумевает, что какая-то форма энергии должна быть добавлена в систему.

Рассмотрим модель на основе соотношения Клаузиуса-Моссотти и Лоренца-Лоренца в композитных средах. Комплексный показатель преломления среды n определяется выражением:

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)} = n'(\omega) + i n''(\omega), \quad (27)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, а μ – магнитная проницаемость среды, $n''(\omega)$ – коэффициент экстинкции.

В общем случае диэлектрическая проницаемость может быть представлена в виде:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega), \quad (28)$$

где $\chi(\omega)$ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Принцип причинности накладывает важные ограничения на дисперсионные соотношения. Согласно теореме Крамерса–Кронига:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (29)$$

где P обозначает главное значение интеграла.

Для неполярных молекул соотношение Клаузиуса–Моссотти имеет вид:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} (f_i N_i \alpha_i + (1 - f_i) N_m \alpha_m) , \quad (30)$$

где N_i – концентрация наноразмерных включений в композитной среде, α_i – поляризуемость наноразмерных включений в композитной среде, N_m – концентрация носителей электрического заряда в матрице композитной среды, α_m – поляризуемость носителей электрического заряда в матрице композитной среды, f_i – фактор заполнения наноразмерными включениями композитной среды.

Для полярных молекул в соотношение Клаузиуса–Моссотти вводится дополнительная поправка:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \left(f_i N_i \alpha_i + (1 - f_i) N_m \alpha_m + N \frac{p^2}{3k_B T} \right) , \quad (31)$$

где p – электрический дипольный момент, k_B – постоянная Больцмана, T – температура.

Для неполярных молекул соотношение Лоренца–Лоренца имеет вид:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} (f_i N_i \alpha_i + (1 - f_i) N_m \alpha_m) , \quad (32)$$

где N_i – концентрация наноразмерных включений в композитной среде, α_i – поляризуемость наноразмерных включений в композитной среде, N_m – концентрация носителей электрического заряда в матрице композитной среды, α_m – поляризуемость носителей электрического заряда в матрице композитной среды, f_i – фактор заполнения наноразмерными включениями композитной среды.

Для полярных молекул в соотношение Лоренца–Лоренца вводится дополнительная поправка:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \left(f_i N_i \alpha_i + (1 - f_i) N_m \alpha_m + N \frac{p^2}{3k_B T} \right) , \quad (33)$$

где p – электрический дипольный момент, k_B – постоянная Больцмана, T – температура.

Соотношение Лоренца–Лоренца связывает показатель преломления с поляризуемостью вещества:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} (f_i N_i \alpha_i + (1 - f_i) N_m \alpha_m) . \quad (34)$$

В случае композитных сред соотношение Лоренца–Лоренца имеет вид:

$$\frac{n_{\text{eff}}^2 - 1}{n_{\text{eff}}^2 + 2} = \sum_i f_i \frac{n_i^2 - 1}{n_i^2 + 2} , \quad (35)$$

где f_i – объёмная доля i -й компоненты в композитной среде.

Дисперсионное уравнение для показателя преломления i -й компоненты в композитной среде имеет вид:

$$n_i^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma_i\omega} , \quad (36)$$

где ω_{pi} – плазменная частота i -й компоненты в композитной среде, ω_{0i} – собственная частота i -й компоненты в композитной среде, γ_i – коэффициент затухания i -й компоненты в композитной среде.

Описание блоков компьютерной программы

Для проведения численных расчетов был разработан программный комплекс на языке Python 2.7.

Выполним импорт библиотек.

```

1 #from numpy import *
  import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt

```

Листинг 2.1. Импорт библиотек

Опишем параметры модели.

```

1 B0 = 0.6961663
  B1 = 0.4079426
3 B2 = 0.8974794
  lambda0 = 0.0284043
5 lambda1 = 0.0240840
  lambda2 = 0.0240840
7
  f = 0.3 # volume fraction of inclusions
9 n_inclusion = 1.5 # refractive index of inclusions

```

Листинг 2.2. Параметры модели

Опишем функцию расчёта показателя преломления.

```

1 def sellmeier(wavelength):
  wavelength2 = wavelength**2
3   n2 = 1 + B0*wavelength2/(wavelength2-lambda0**2) + \
        B1*wavelength2/(wavelength2-lambda1**2) + \
5   B2*wavelength2 / (wavelength2-lambda2**2)
  return sqrt(n2)

```

Листинг 2.3. Функция Зельмейера

Опишем функцию для расчёта эффективных параметров композитной среды.

```

def effective_parameters(wavelength):
2   n_matrix = Sellmeier(wavelength)
  n_eff = (n_matrix**3 + 3.0*f*(n_inclusion**2 - n_matrix**2))/\
4   (1.0 + 3.0*f*(n_inclusion**2/n_matrix**2 - 1))
  epsilon_eff = n_eff**2
6   Z = sqrt((epsilon_eff - 1.0)/(epsilon_eff + 1.0))
  return n_eff, epsilon_eff, Z

```

Листинг 2.4. Эффективные параметры

Опишем функцию, предназначенную для расчёта оптических характеристик композитной среды.

```

1 def optical_properties(Z):
  R = abs((Z - 1)/(Z + 1))**2 # reflectance
3   T = 1.0/(1.0+abs((Z - 1)/(Z + 1))**2) # transmittance
  A = 1-R-T # absorptance
5   return R, T, A

```

Листинг 2.5. Оптические характеристики

Компьютерная программа выполняет следующие основные функции: инициализацию параметров модели, расчёт показателя преломления по формуле Зельмейера, вычисление эффективных параметров композитной среды, определение оптических характеристик композитной среды, построение графиков зависимостей. Компьютерная программа позволяет получить следующие зависимости: зависимость эффективного показателя преломления от длины волны излучения, зависимость эффективной диэлектрической проницаемости от длины волны излучения, зависимость эффективный поверхностный импеданс от длины волны излучения, зависимость коэффициентов отражения, пропускания и поглощения от длины волны излучения.

Заключение

Полученные соотношения позволяют описывать оптические свойства композитных сред с учётом их микроскопической структуры. Важным результатом является установление связи между макроскопическими оптическими характеристиками и микроскопическими параметрами композитной среды.

Выводы могут быть сформулированы следующим образом:

- закон Бугера–Ламберта–Бера в классической форме $I = I_0 \exp(-\gamma d)$ сохраняет применимость для метаматериалов при корректном определении коэффициента поглощения γ ,
- подтверждена универсальность соотношения Лоренца–Лоренца для композитных сред из метаматериалов для описания взаимосвязи между эффективным показателем преломления и микроструктурными параметрами,
- разработанная программа позволяет проводить анализ оптических свойств композитных сред с учётом их микроструктуры, который приводит установлению закономерностей в поведении оптических характеристик композитных сред.

Гипотеза исследования, заключающаяся в том, что закон Бугера–Ламберта–Бера сохраняет свою математическую форму для метаматериалов с отрицательным показателем преломления при условии корректного определения коэффициента поглощения и учёта физических эффектов, учитывающих возможность поглощения или усиления оптического излучения в метаматериалах, полностью подтверждена.

Теоретические положения полностью подтверждены результатами проведённого исследования. Таким образом, закон Бугера–Ламберта–Бера сохраняет свою универсальность и применимость даже для композитных сред из метаматериалов, таких как метаматериалы с отрицательным показателем преломления, при условии соблюдения фундаментальных физических принципов, включая закон сохранения энергии. Ключевым моментом является корректный учёт всех физических параметров среды при определении коэффициента поглощения γ и дополнительных факторов, таких как отражение на границах. Формальное применение закона Бугера–Ламберта–Бера к метаматериалам с отрицательным показателем преломления не приводит к нарушению закона сохранения энергии, если коэффициент поглощения определён корректно как положительная величина. Практическая значимость научного исследования заключается в потенциале создания новых оптоэлектронных устройств, таких как сверхтонкие линзы и оптоэлектронные устройства для манипуляции светом, что может революционизировать области телекоммуникаций и нанофотоники. Разработанные модели могут быть успешно применены при проектировании оптических устройств из метаматериалов для оптических маскирующих покрытий, узкополосных поглотителей излучения, управляемых оптических фильтров с перестраиваемыми характеристиками.

Список использованных источников

1. Negative-index metamaterials: going optical / Thomas A. Klar [et al.] // IEEE Journal of selected topics in quantum electronics. — 2006. — nov. — Vol. 12, no. 6. — P. 1106–1115. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/JSTQE.2006.880597>.
2. Shelby R. A., Smith D. R., Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction // Science. — 2001. — apr. — Vol. 292, no. 5514. — P. 77–79. — URL: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1058847>.
3. Negative refractive index in chiral metamaterials / Shuang Zhang [et al.] // Physical Review Letters. — 2009. — jan. — Vol. 102, no. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.023901>.
4. Hybrid polymer/sol-gel waveguide modulators with exceptionally large electro-optic coefficients / Y. Enami [et al.] // Nature photonics. — 2007. — mar. — Vol. 1, no. 3. — P. 180–185. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2007.25>.
5. Overcoming losses with gain in a negative refractive index metamaterial / Sebastian Wuestner [et al.] // Physical Review Letters. — 2010. — sep. — Vol. 105, no. 12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.127401>.
6. Fabrication and characterization of a negative-refractive-index composite metamaterial / A. F. Starr [et al.] // Physical Review B. — 2004. — sep. — Vol. 70, no. 11. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.70.113102>.
7. Slovic Brian A. Negative refractive index induced by percolation in disordered metamaterials // Physical Review B. — 2017. — mar. — Vol. 95, no. 9. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.094202>.
8. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials / A. L. Rakhmanov [et al.] // Physical Review B. — 2010. — feb. — Vol. 81, no. 7. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.81.075101>.

Сведения об авторах:

Константин Константинович Алтунин — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и технических дисциплин ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», Ульяновск, Россия.

E-mail: kostya_altunin@mail.ru

ORCID iD  0000-0002-0725-9416

Web of Science ResearcherID  I-5739-2014

SCOPUS ID  57201126207

IstinaResearcherID  66185348

Original article
 PACS 42.25.Bs
 OCIS 260.2110
 MSC 78A10

Investigation of the Beer-Lambert law and the Clausius-Mossotti-Lorentz-Lorentz relationship in composite media made of negative-refractive-index metamaterials

K. K. Altunin 

Ulyanovsk State Pedagogical University, 432071, Ulyanovsk, Russia

Submitted February 10, 2026
 Resubmitted February 12, 2026
 Published March 31, 2026

Abstract. The application of the classical Bouguer-Lambert-Beer law to a plate made of a metamaterial with a negative refractive index is considered. The aim of this work is to study the specifics of applying the Beer-Lambert law to negative-index metamaterials, to identify the laws of light propagation in metamaterial media, and to analyze the limits of applicability of the Beer-Lambert law under conditions of anomalous dispersion.

Keywords: composite, composite medium, refractive index, permittivity, metamaterial

References

1. Negative-index metamaterials: going optical / Thomas A. Klar [et al.] // IEEE Journal of selected topics in quantum electronics. — 2006. — nov. — Vol. 12, no. 6. — P. 1106–1115. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/JSTQE.2006.880597>.
2. Shelby R. A., Smith D. R., Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction // Science. — 2001. — apr. — Vol. 292, no. 5514. — P. 77–79. — URL: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1058847>.
3. Negative refractive index in chiral metamaterials / Shuang Zhang [et al.] // Physical Review Letters. — 2009. — jan. — Vol. 102, no. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.023901>.
4. Hybrid polymer/sol-gel waveguide modulators with exceptionally large electro-optic coefficients / Y. Enami [et al.] // Nature photonics. — 2007. — mar. — Vol. 1, no. 3. — P. 180–185. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2007.25>.
5. Overcoming losses with gain in a negative refractive index metamaterial / Sebastian Wuestner [et al.] // Physical Review Letters. — 2010. — sep. — Vol. 105, no. 12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.127401>.
6. Fabrication and characterization of a negative-refractive-index composite metamaterial / A. F. Starr [et al.] // Physical Review B. — 2004. — sep. — Vol. 70, no. 11. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.70.113102>.

7. Slovick Brian A. Negative refractive index induced by percolation in disordered metamaterials // Physical Review B. — 2017. — mar. — Vol. 95, no. 9. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.094202>.
8. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials / A. L. Rakhmanov [et al.] // Physical Review B. — 2010. — feb. — Vol. 81, no. 7. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.81.075101>.

Information about authors:

Konstantin Konstantinovich Altunin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics and Technical Disciplines of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Ulyanovsk State Pedagogical University”, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: kostya.altunin@mail.ru

ORCID iD  0000-0002-0725-9416

Web of Science ResearcherID  I-5739-2014

SCOPUS ID  57201126207

IstinaResearcherID  66185348