

УДК 514.8
ББК 22.161
ГРНТИ 27.23.15
ВАК 01.01.01

Метод наименьших квадратов как инструмент изучения зависимости между величинами в физическом эксперименте

О. В. Макеева , Д. В. Воронова  ¹

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», 432071,
Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 2 октября 2020 года

После переработки 19 февраля 2021 года

Опубликована 5 марта 2021 года

Аннотация. Описана аналитическая реализация метода наименьших квадратов в линейном и нелинейном случаях. Применение метода иллюстрируется примерами обработки средствами Microsoft Excel результатов двух физических экспериментов. Практический интерес представляет применение метода наименьших квадратов к обработке совокупности экспериментальных значений двух величин, между которыми существует линейная или нелинейная зависимость, что очень характерно для связанных друг с другом физических величин, совокупность пар значений которых зафиксирована приборами.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, обработка совокупности экспериментальных значений, линейный случай, нелинейный случай, линейная зависимость, нелинейная зависимость, физические величины

Введение

До начала XIX века учёные не имели определенных правил для решения систем уравнений, в которых число неизвестных менее числа уравнений. А. Лежандру и К. Гауссу принадлежит первое применение к решению таких систем элементов теории вероятностей. Как и в случае арифметической середины, вновь изобретённый способ не даёт истинных значений искомых величин, но даёт их вероятнейшие значения. Этот способ распространён и усовершенствован дальнейшими изысканиями П. Лапласа, И. Энке, Ф. Бесселя, П. Ганзена и других учёных. Он получил название метода наименьших квадратов. После подстановки в начальные уравнения вместо неизвестных величин, полученных этим способом, в правых частях уравнений получаются, если и не нули, то небольшие величины, сумма квадратов которых оказывается меньшей, чем сумма квадратов подобных же остатков, после подстановки каких бы то ни было других значений переменных. Помимо этого, решение уравнений по способу наименьших квадратов даёт возможность выводить вероятные ошибки неизвестных, то есть даёт величины, по которым судят о степени точности выводов [1].

¹E-mail: iceblitz@mail.ru

Практический интерес представляет применение данного метода к обработке совокупности экспериментальных значений двух величин, между которыми существует линейная или нелинейная зависимость, что, например, очень характерно для связанных друг с другом физических величин, совокупность пар значений которых зафиксирована приборами.

Теоретические основы метода наименьших квадратов

Предположим, что теоретически предсказана прямая пропорциональность между двумя величинами x и y . Обычно это записывается следующим образом:

$$y = f(x) . \quad (1)$$

Необходимо узнать точный закон, устанавливающий связь между x и y , и, поскольку друг другу пропорциональны первые степени этих величин (1), то между x и y существует линейная зависимость:

$$y = ax + b . \quad (2)$$

По результатам эксперимента могут быть получены n пар значений величин x и y : (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) , и все точки с данными координатами можно отметить на координатной плоскости Oxy (рис. 1).

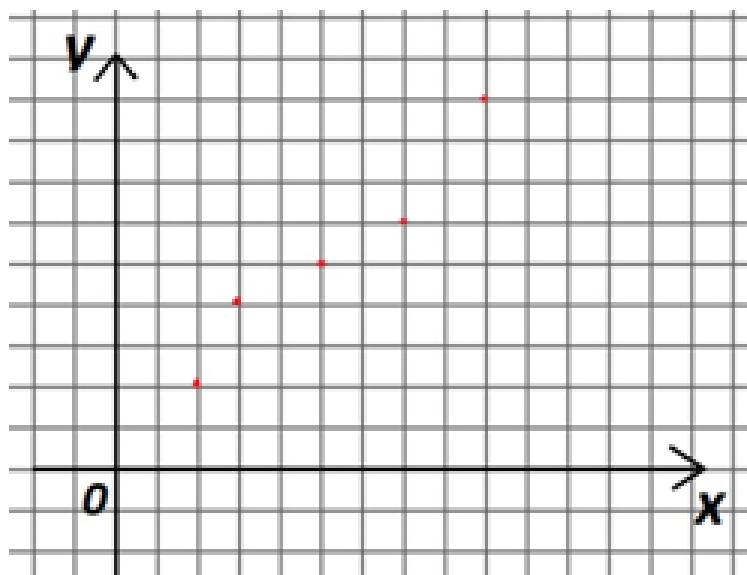


Рис. 1. Разброс экспериментальных точек.

Из-за погрешностей, возникших в ходе эксперимента, точки разбросаны по плоскости и не лежат на одной прямой. Необходимо найти такое положение прямой линии $y = ax + b$, которое максимально точно отражает истинность эмпирического закона в рамках сделанных измерений [2]. Это произойдёт лишь тогда, когда все точки одновременно будут лежать настолько близко к прямой, насколько это возможно для каждой из них. Такую линию называют линией регрессии, её уравнение отражает зависимость переменной y от независимой переменной x при условии, что выражение зависимости между величинами будет иметь статистическую значимость, то есть найдено только с помощью экспериментальных значений (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) [3].

Пусть такая линия регрессии построена. В идеальном случае экспериментальная точка M с координатами (x_k, y_k) должна лежать на прямой $y = ax + b$ и иметь координаты (x_k, y) (рис. 2). На графике наблюдается сдвиг ординаты на величину

$$\Delta y_k = y - y_k . \quad (3)$$

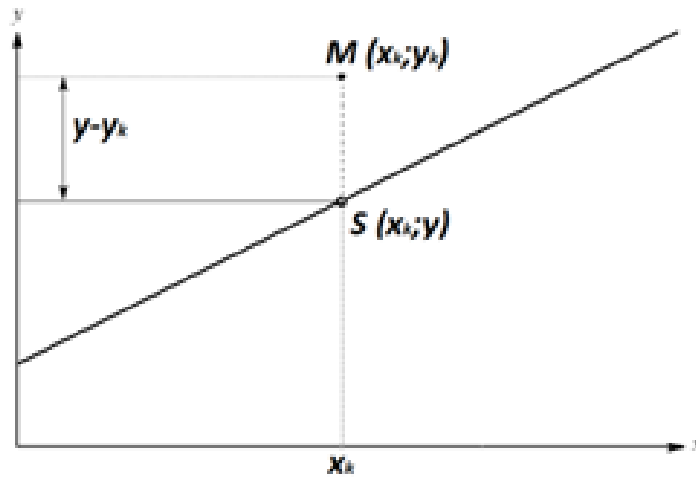


Рис. 2. Линия регрессии и отклонение экспериментальной точке по ординате.

С учётом уравнения (2) равенство (3) запишется следующим образом:

$$\Delta y_k = ax_k + b - y_k . \quad (4)$$

Стоит понимать, что k – это индекс, обозначающий номер записи значения величин в ходе эксперимента.

Одним из условий построения прямой (2), как указывалось выше, является максимально возможное приближение каждой точки к прямой. Исходя из этого, возникает идея решения: сумма отклонений (4), найденных для всех экспериментальных точек, должна быть минимальной. Однако доказано [1], что целесообразно составить сумму квадратов отклонений:

$$z = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2 . \quad (5)$$

Поскольку кортежи $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ состоят из чисел, которые известны, то в выражении (5) есть только три неизвестные величины: z , a , b . Также можно утверждать, что выражение (5) является функцией двух переменных: $z = z(a, b)$. С другой стороны, z – это значение суммы, которое нужно минимизировать. Так как функция (5) является гладкой, непрерывной на всей координатной плоскости, задачу минимизации можно решить средствами дифференциального исчисления.

1. Найти частные производные первого порядка функции (5).

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial a} &= 2x_1(ax_1 + by_1) + 2x_2(ax_2 + b - y_2) + \dots + 2x_n(ax_n + b - y_n) = \\ &= - \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - a \sum_{k=1}^n x_k^2 - b \sum_{k=1}^n x_k \right) , \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial b} &= 2(ax_1 + by_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \dots + 2(ax_n + b - y_n) = \\ &= - \left(\sum_{k=1}^n y_k - a \sum_{k=1}^n x_k - bn \right) . \quad (7) \end{aligned}$$

2. Приравнять найденные значения частных производных к нулю.

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k + b n = \sum_{k=1}^n y_k. \end{cases} \quad (8)$$

3. Найти координаты a, b стационарной точки функции (5) решив систему, например, методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{vmatrix} = n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k, \quad (9)$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n y_k & n \end{vmatrix} = n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k, \quad (10)$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n y_k \end{vmatrix} = n \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n x_k y_k \sum_{k=1}^n x_k, \quad (11)$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}. \quad (12)$$

4. Используя достаточное условие экстремума, по знаку второго дифференциала функции (5) убедиться в том, что найденная стационарная точка является точкой минимума.

$$\begin{aligned} d^2 z(a, b) &= \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} da^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial b} dadb + \frac{\partial^2 z}{\partial b^2} db^2 = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 da^2 + 4 \sum_{k=1}^n x_k dadb + 2n db^2 = 2 \sum_{k=1}^n (x_k da + db)^2 > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

Значит, уравнение $y = ax + b$ с коэффициентами (12) является уравнением линии регрессии. Конечно, судить о справедливости закона, устанавливающего связь между многократно измеренными величинами x и y можно только в том случае, если в эксперименте отсутствовали систематические и грубые погрешности [4].

В естественных науках, в том числе и физике, не всегда закон, связывающий две величины, оказывается линейным. Чаще всего зависимость одной величины от других имеет более сложный характер. В этом случае график линии регрессии также примет более сложный вид. Задача остаётся прежней: после проведения опыта и записи числовых результатов на плоскости Oxy появляется разброс экспериментальных точек, который не позволяет точно и однозначно провести линию, отражающую динамику изменения величины $y = y(x)$. Будем считать, что характер зависимости $y = y(x)$ известен, тогда задача о нахождении линии регрессии сводится к нахождению формул коэффициентов (оцениваемых параметров). Для нелинейной зависимости поиск оцениваемых параметров линии регрессии осуществляется с помощью такой замены переменных, благодаря которой нелинейную форму зависимости удаётся привести к линейной форме с известными формулами расчёта параметров [5].

Рассмотрим классификацию наиболее простых видов нелинейной регрессии. Всюду ниже y и x – переменные (физические величины).

1. Регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.

1.1. Полином k -ой чётной степени: $y = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k$, где $b_0, b_1, \dots, b_n$ – оцениваемые параметры (постоянные). В случае нечётной степени полинома функция, определяющая сумму квадратов отклонений экспериментальных значений от теоретического распределения, не имеет точки минимума. Рассматриваемая ранее линейная регрессия, есть один из случаев полинома k -ой степени при $k = 1$. Замена переменных: $x = z_1, x^2 = z_2, \dots, x^k = z_k$ приводит к линейному уравнению: $y = b_0 + b_1z_1 + \dots + b_kz_k$. Простейшим примером из физики в случае квадратичной регрессии (полином степени $k = 2$) является формула для нахождения координаты тела, движущегося прямолинейно равноускоренно:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (14)$$

1.2. Равносторонняя гипербола: $y = \frac{a}{x} + b$, где a, b – оцениваемые параметры. Замена переменной: $\hat{x} = \frac{1}{x}$ приводит к линейному уравнению $y = a\hat{x} + b$. Зависимость силы тока цепи от полного сопротивления цепи является обратной и графически представляет собой гиперболу, для которой параметр b равен нулю (рис. 3).

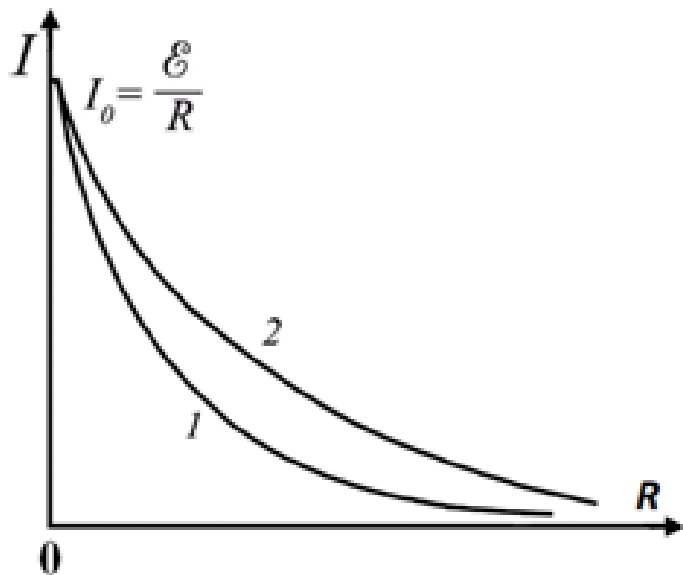


Рис. 3. График зависимости силы тока от полного сопротивления цепи.

2. Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

2.1. Степенная: $y = ax^b$. Перед тем, как произвести замену переменных, необходимо прологарифмировать исходное выражение: $\ln y = \ln a + b \ln x$. В новых обозначениях: $\hat{y} = \ln y, \hat{a} = b, \hat{b} = \ln a$, получается уравнение линейной регрессии: $\hat{y} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}$.

2.2. Обратная: $y = \frac{1}{ax+b}$. Замена переменной: $\hat{y} = \frac{1}{y}$ приводит к линейному уравнению $\hat{y} = ax + b$.

2.3. Показательная: $y = ab^x$. После логарифмирования $\ln y = \ln a + x \ln b$ в новых обозначениях: $\hat{y} = \ln y, \hat{a} = b, \hat{b} = \ln a$ получается уравнение линейной регрессии: $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$.

2.4. Экспоненциальная: $y = \exp(ax + b)$. Замена переменной: $\hat{y} = \ln y$ приводит к линейному уравнению $\hat{y} = ax + b$. Примером такой зависимости может служить формула интенсивности света I , проходящего через слой вещества толщиной x : $I = I_0 \exp(-\mu x)$ (рис. 4) [6].

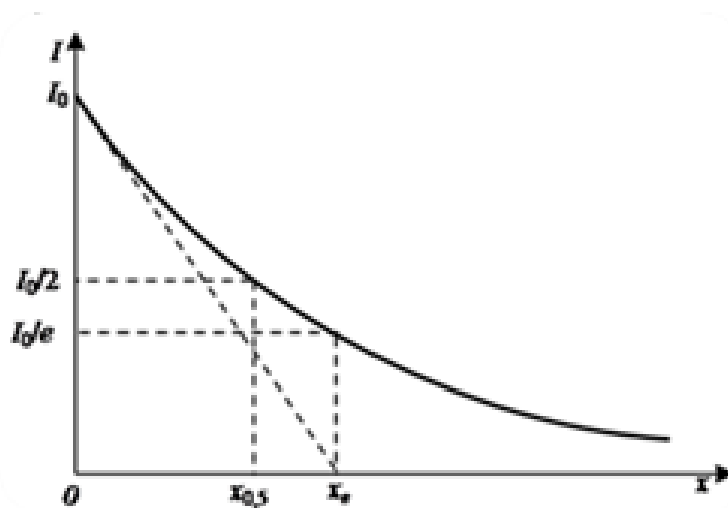


Рис. 4. График зависимости интенсивности света от пути, пройденного в поглощающей среде.

Применим метод наименьших квадратов для определения температурного коэффициента нагревания алюминия. При определении температурного коэффициента нагрева алюминия происходит проверка линейного характера изменения температуры металлов при постоянном нагреве, при этом значения температуры в ходе эксперимента много ниже температуры плавления данного металла [4]. В качестве такого образца, который, к тому же, обладает хорошей теплопроводностью, обычно используется алюминий. Источником теплоты может служить газовая горелка или нагретая до определённой температуры электрическая плитка. Важно, чтобы образец был однородным, без полостей и уплотнений, а нагревание происходило равномерно, то есть каждую единицу времени образцу сообщается фиксированная порция количества теплоты и температура с течением времени изменяется равномерно. Такая формулировка есть не что иное, как физический смысл некой величины, которую мы назовём температурным коэффициентом k : $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$. Данный коэффициент показывает, на сколько градусов изменяется температура тела за 1 минуту, поэтому экспериментальная формула, позволяющая узнать температуру этого тела в любой момент времени, будет выглядеть следующим образом:

$$T = T_0 + kt, \quad (15)$$

где T_0 – температура в начальный момент времени (перед нагреванием), t – время нагревания, k – температурный коэффициент. Эксперимент проводится следующим образом: в калориметрическую ёмкость с водой погружается небольшой алюминиевый цилиндр и через некоторое время измеряют температуру воды, равную температуре алюминия T_0 с помощью специального термометра. Далее ёмкость ставят на разогретую плитку, засекают время и каждую минуту фиксируют температуру воды. В результате такого эксперимента было получено 15 значений температуры алюминия от времени. При $t = 0$ мин $T = 24^{\circ}\text{C}$. При $t = 1$ мин $T = 27.9^{\circ}\text{C}$. При $t = 2$ мин $T = 29.7^{\circ}\text{C}$. При $t = 3$ мин $T = 31.5^{\circ}\text{C}$. При $t = 4$ мин $T = 32.7^{\circ}\text{C}$. При $t = 5$ мин $T = 34.1^{\circ}\text{C}$. При $t = 6$ мин $T = 35.9^{\circ}\text{C}$. При $t = 7$ мин $T = 37.3^{\circ}\text{C}$. При $t = 8$ мин $T = 40^{\circ}\text{C}$. При $t = 9$ мин $T = 42.1^{\circ}\text{C}$. При $t = 10$ мин $T = 44.3^{\circ}\text{C}$. При $t = 11$ мин $T = 46.5^{\circ}\text{C}$. При $t = 12$ мин $T = 49.1^{\circ}\text{C}$. При $t = 13$ мин $T = 52.4^{\circ}\text{C}$. При $t = 14$ мин $T = 55^{\circ}\text{C}$.

Задача о нахождении значения температурного коэффициента может быть решена графически, путём построения графика зависимости (рис. 5) по точкам. По данному графику температурный коэффициент k как тангенс угла наклона экспериментальной прямой не может быть найден однозначно, а, значит, стоит воспользоваться методом

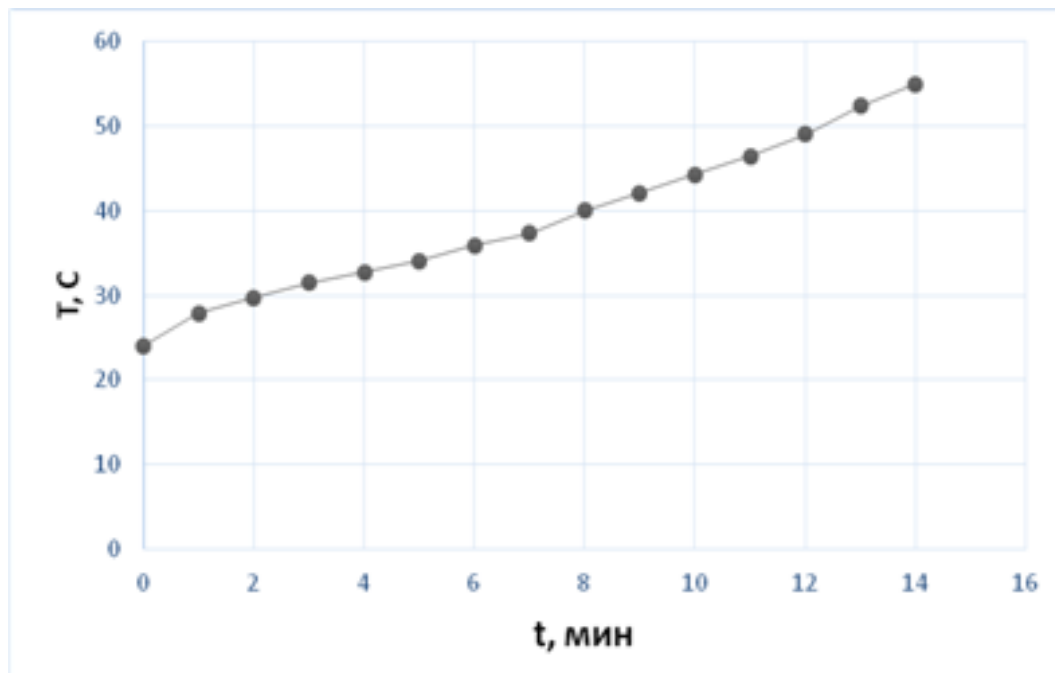


Рис. 5. Экспериментальный график зависимости температуры алюминия от времени нагревания.

наименьших квадратов. Формулы для нахождения коэффициентов линейной регрессии известны (6)-(13), необходимо только изменить названия самих коэффициентов и переменных в формулах следующим образом:

$$\begin{cases} T = T_0 + kt, \\ y = b + ax, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$T_0 = \frac{\sum_{k=1}^n t_k^2 \sum_{k=1}^n T_k - \sum_{k=1}^n t_k \sum_{k=1}^n t_k T_k}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - \sum_{k=1}^n t_k \sum_{k=1}^n t_k},$$

$$k = \frac{n \sum_{k=1}^n T_k t_k - \sum_{k=1}^n T_k \sum_{k=1}^n t_k}{n \sum_{k=1}^n t_k^2 - \sum_{k=1}^n t_k \sum_{k=1}^n t_k},$$

Значение температурного коэффициента может быть найдено и без построения графика, а только с помощью расчётной формулы с применением пакета Microsoft Excel (рис. 6). Сам график служит для оценки величины разброса экспериментальных точек (рис. 7) [4].

Применим метод наименьших квадратов для определения значения ускорения свободного падения. Достаточно часто линию регрессии необходимо построить в той области графика, где экспериментальных точек нет. В этом случае говорят об экстраполяции – построении линии за пределами области её экспериментальных значений. Необходимость в экстраполяции возникает при обработке результатов физического эксперимента в тех случаях, когда оборудование позволяет провести измерение в малом диапазоне значений физической величины, а картину динамики физического явления необходимо представить полностью. Метод наименьших квадратов решает и эту задачу, позволяя

Formula bar: $=\$H\$2+\$H\$1*\$J2$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	№	t	T	t^2	T*t		k	2,056785714		t	T _{экс}	T _{рег}	
2	1	0	24	0	0		T ₀	24,43583333		0	24	24,43583	
3	2	1	27,9	1	27,9					1	27,9	26,49262	
4	3	2	29,7	4	59,4					2	29,7	28,5494	
5	4	3	31,5	9	94,5					3	31,5	30,60619	
6	5	4	32,7	16	130,8					4	32,7	32,66298	
7	6	5	34,1	25	170,5					5	34,1	34,71976	
8	7	6	35,9	36	215,4					6	35,9	36,77655	
9	8	7	37,3	49	261,1					7	37,3	38,83333	
10	9	8	40	64	320					8	40	40,89012	
11	10	9	42,1	81	378,9					9	42,1	42,9469	
12	11	10	44,3	100	443					10	44,3	45,00369	
13	12	11	46,5	121	511,5					11	46,5	47,06048	
14	13	12	49,1	144	589,2					12	49,1	49,11726	
15	14	13	52,4	169	681,2					13	52,4	51,17405	
16	15	14	55	196	770					14	55	53,23083	
17	Сумма	105	582,5	1015	4653								

Рис. 6. Таблица Excel для расчёта коэффициентов и построения экспериментальной кривой и линии регрессии.

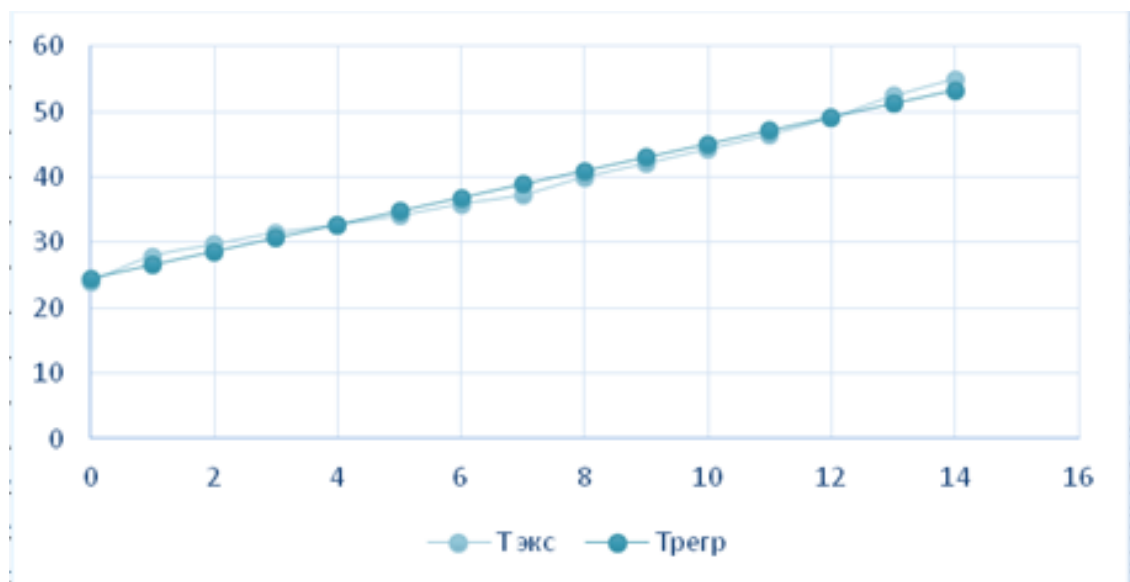


Рис. 7. График зависимости температуры алюминия (в градусах) от времени нагрева (в минутах) и график линейной регрессии.

избежать тех грубых ошибок или неточностей, которые могут возникнуть при проведении линии от руки. В случае определения ускорения свободного падения проблема экстраполяции наблюдается очень чётко [7].

Секундомер, панель с нормально замкнутыми контактами и электромагнит включают в сеть, при этом электромагнит фиксируют на определённой высоте. К электромагниту подносят стальной шарик, на место падения кладут поролоновую губку. После размыкания цепи шарик начинает падать и секундомер отсчитывает время его падения, автоматически выключаясь, когда шарик касается пластинки в самом низу. Зная высоту падения и время падения, можно найти ускорение свободного падения по формуле: $h = \frac{gt^2}{2}$.

Основным недостатком такого метода является малый диапазон высот и малая точность на маленьких высотах (ввиду точности секундомера и соизмеримости времени полёта и времени размыкания цепи). Поэтому данный эксперимент приходится повторять по нескольку раз для одних и тех же значений высоты, чтобы получить экспериментальные значения высоты и времени падения стального шарика. [8]. При значении высоты $h = 4$ м время падения $t = 0.93$ с. При значении высоты $h = 4$ м время падения $t = 0.895$ с. При значении высоты $h = 4$ м время падения $t = 0.898$ с. При значении высоты $h = 3$ м время падения $t = 0.79$ с. При значении высоты $h = 3$ м время падения $t = 0.797$ с. При значении высоты $h = 3$ м время падения $t = 0.776$ с. При значении высоты $h = 2.5$ м время падения $t = 0.72$ с. При значении высоты $h = 2.5$ м время падения $t = 0.76$ с. При значении высоты $h = 2.5$ м время падения $t = 0.77$ с. При значении высоты $h = 2$ м время падения $t = 0.639$ с. При значении высоты $h = 2$ м время падения $t = 0.645$ с. При значении высоты $h = 2$ м время падения $t = 0.637$ с. При значении высоты $h = 1$ м время падения $t = 0.449$ с. При значении высоты $h = 1$ м время падения $t = 0.446$ с. При значении высоты $h = 1$ м время падения $t = 0.451$ с.

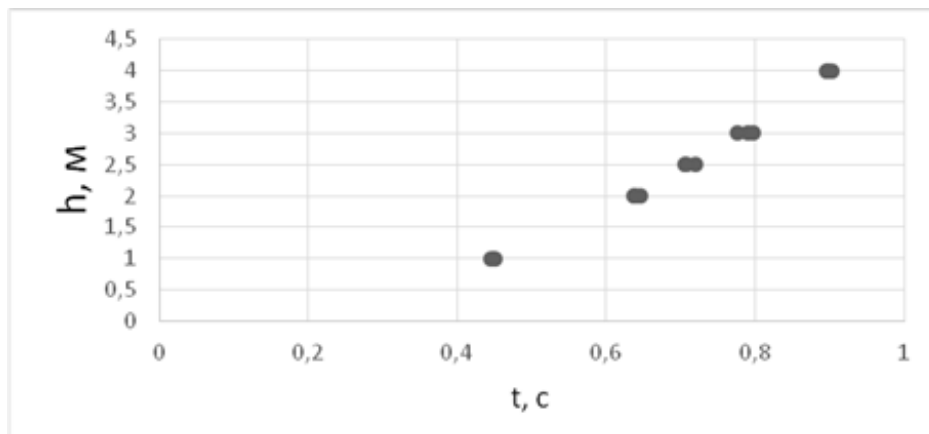


Рис. 8. Экспериментальный график зависимости высоты падения от времени падения.

Ускорение свободного падения находится как среднее арифметическое от всех значений ускорений, найденных для каждого измерения. Однако графически данные представлены так, что построить часть параболы и тем более её полностью не представляется возможным (рис. 8). Применим метод наименьших квадратов для построения линии регрессии функции $h = \frac{gt^2}{2} = bt^2$, где $b = \frac{g}{2}$. После логарифмирования $\ln h = \ln b + \ln t^2$ и замены переменных $\hat{h} = \ln h$, $\hat{b} = \ln b$, $\hat{t} = \ln t^2$ получается линейное уравнение $\hat{h} = \hat{b} + \hat{t}$. Составим сумму квадратов отклонений экспериментальных значений от теоретического распределения и найдём точку минимума.

$$z(\hat{b}) = (\hat{t}_1 + \hat{b} - \hat{h}_1)^2 + (\hat{t}_2 + \hat{b} - \hat{h}_2)^2 + \dots + (\hat{t}_n + \hat{b} - \hat{h}_n)^2, \quad (17)$$

$$z'(\hat{b}) = 2(\hat{t}_1 + \hat{b} - \hat{h}_1) + 2(\hat{t}_2 + \hat{b} - \hat{h}_2) + \dots + 2(\hat{t}_n + \hat{b} - \hat{h}_n) =$$

$$= -2 \left(\sum_{k=1}^n \hat{h}_k - \sum_{k=1}^n \hat{t}_k - n\hat{b} \right), \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^n \hat{h}_k - \sum_{k=1}^n \hat{t}_k - n\hat{b} = 0, \quad (19)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	№	h	t	t^2	ln(h)	ln(t)	ln(t^2)						t	h	H
2	1	4	0,903	0,815	1,386	-0,1	-0,2						0,903	4	4,008
3	2	4	0,895	0,801	1,386	-0,11	-0,22						0,895	4	3,938
4	3	4	0,898	0,806	1,386	-0,11	-0,22						0,898	4	3,964
5	4	3	0,79	0,624	1,099	-0,24	-0,47						0,79	3	3,068
6	5	3	0,797	0,635	1,099	-0,23	-0,45						0,797	3	3,123
7	6	3	0,776	0,602	1,099	-0,25	-0,51						0,776	3	2,96
8	7	2,5	0,72	0,518	0,916	-0,33	-0,66						0,72	2,5	2,548
9	8	2,5	0,706	0,498	0,916	-0,35	-0,7						0,706	2,5	2,45
10	9	2,5	0,707	0,5	0,916	-0,35	-0,69						0,707	2,5	2,457
11	10	2	0,639	0,408	0,693	-0,45	-0,9						0,639	2	2,007
12	11	2	0,645	0,416	0,693	-0,44	-0,88						0,645	2	2,045
13	12	2	0,637	0,406	0,693	-0,45	-0,9						0,637	2	1,995
14	13	1	0,449	0,202	0	-0,8	-1,6						0,55		1,487
15	14	1	0,446	0,199	0	-0,81	-1,61						0,449	1	0,991
16	15	1	0,451	0,203	0	-0,8	-1,59						0,446	1	0,978
17				Сумма	12,28	-5,8	-11,6						0,451	1	1
18													0,3		0,442
19													0,2		0,197
20													0,1		0,049
21		b*		1,592461176									0	0	0
22		b		4,915832783											
23		g		9,83166557											

Рис. 9. Таблица Excel для расчёта коэффициентов и построения экспериментальной кривой и линии регрессии.

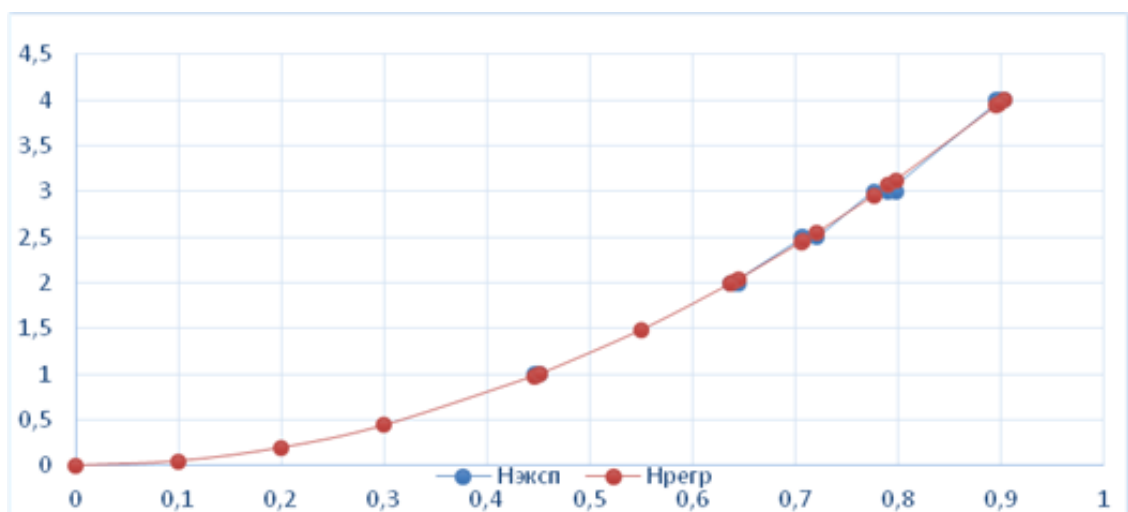


Рис. 10. График линии регрессии и экспериментальной кривой.

С помощью пакета Microsoft Excel можно выполнить необходимые расчёты (рис. 9) и построения (рис. 10).

Таким образом, построенная линия регрессии даёт полное представление о времени падения тела в области малых высот, что не позволяет сделать описанный эксперимент. Но стоит отметить, что экстраполяция методом наименьших квадратов может быть осуществлена только в том случае, если известен тип зависимости между двумя измеряемыми величинами.

Заключение

Учебное исследование по праву считается одной из важнейших форм организации обучения в вузе. Какой должна быть исследовательская деятельность будущих педагогов? Очевидно, что она не должна исчерпываться лишь освоением нового содержания в предметной области. Неотъемлемым является профессионально ориентированный характер работы с дидактическим материалом: изучение структуры знания с точки зрения его преподавания и освоения, выявление межпредметных связей, знакомство с историей формирования содержания. Именно с таких позиций в данной работе рассматривается метод наименьших квадратов. Задача, приводящая к идее и реализации метода для расчёта коэффициентов регрессии линейного типа, обобщена распространением метода на основные случаи нелинейной регрессии (полином k -ой чётной степени, равносторонняя гиперболоа, степенная, обратная, показательная и экспоненциальная зависимость). В качестве практического применения метода проведена обработка с помощью программы Microsoft Excel результатов физических экспериментов с линейной зависимостью (определение температурного коэффициента нагревания алюминия) и нелинейной (квадратичной) зависимостью между величинами (определение значения ускорения свободного падения). Результаты обработки данных проиллюстрированы графически: зависимость между исследуемыми физическими характеристиками представлена как экспериментальными точками, так и соответствующими линиями регрессии. Тем самым наглядно продемонстрированы возможности метода наименьших квадратов по сравнению с исключительно численной статистической обработкой данных при интерпретации результатов физического эксперимента. С такой задачей по обработке совокупности экспериментальных значений двух величин, между которыми существует линейная или нелинейная зависимость, сталкиваются студенты технических специальностей средних специальных и высших учебных заведений, а также школьники профильных классов. Достаточно трудоёмкий вычислительный процесс обработки результатов лабораторных работ, целесообразно оптимизировать, используя возможности приложения Microsoft Excel. Изучение метода наименьших квадратов именно в таком ключе – как математического инструмента для решения прикладных задач, автоматизируемого средствами электронных таблиц, наглядно демонстрирует метапредметный характер научного знания и его единство.

Список использованных источников

1. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — Москва : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 336 с.
2. Пантаев М. Ю. Матанализ с человеческим лицом: в 2 томах. Т. 2. — Москва : ЛЕ-НАНД, 2015. — 368 с.
3. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 232 с.
4. Слободянюк А. И. Метод наименьших квадратов в школьном физическом эксперименте // Физика: проблемы преподавания. — 1995. — № 1. — С. 88–89.

5. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: в 2 томах. Т. 2. — Москва : Финансы и статистика, 1986. — 351 с.
6. Сивухин Д. В. Общий курс физики: в 5 т. Т 4. Оптика. — Москва : Физматлит, 2002. — 752 с.
7. Анциферов Л. И., Пищиков И. М. Практикум по методике и технике школьного физического эксперимента : учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математическим специальностям. — Москва : Просвещение, 1984. — 255 с.
8. Яворский В. А. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. — Москва : Московский физико-технический институт (государственный университет), 2006. — 24 с.

Сведения об авторах:

Ольга Викторовна Макеева — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики факультета физико-математического и технологического образования ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», город Ульяновск, Россия.

E-mail: mov_ulsput@mail.ru

ORCID iD  0000-0003-4345-2296

Web of Science ResearcherID  ABA-2550-2020

SCOPUS ID  24171477100

Дарья Владиславовна Воронова — студент факультета физико-математического и технологического образования ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», город Ульяновск, Россия.

E-mail: iceblitz@mail.ru, iceblitz020898@gmail.com

ORCID iD  0000-0003-2055-9904

Web of Science ResearcherID  ABI-4025-2020

Least squares method as a tool for studying the relationship between quantities in a physical experiment

O. V. Makeeva , D. V. Voronova 

Ulyanovsk State Pedagogical University, 432071, Ulyanovsk, Russia

Submitted October 2, 2020
Resubmitted February 19, 2021
Published March 5, 2021

Abstract. An analytical implementation of the least squares method in the linear and nonlinear cases is described. The application of the method is illustrated by examples of processing the results of two physical experiments using Microsoft Excel. Of practical interest is the application of the least squares method to the processing of a set of experimental values of two quantities between which there is a linear or nonlinear dependence, which is very typical for physical quantities related to each other, the set of pairs of values of which is fixed by instruments.

Keywords: least squares method, processing of a set of experimental values, linear case, nonlinear case, linear dependence, nonlinear dependence, physical quantities

PACS: 02.60.Ed

References

1. Antsiferov L. I., Pishchikov I. M. Workshop on the methodology and technique of a school physical experiment: a textbook for students of pedagogical institutes in physics and mathematics. — Moscow : Education, 1984. — 255 p.
2. Draper N., Smith G. Applied Regression Analysis: in 2 volumes. Vol. 2. — Moscow : Finance Statistics, 1986. — 351 p.
3. Linnik Yu. V. Least squares method and the foundations of the mathematical and statistical theory of observation processing. — Moscow : Main publishing house of physical and mathematical literature, 1958. — 336 p.
4. Lawson Ch., Henson R. Numerical solution of problems of the method of least squares. — Moscow : Science. Main publishing house of physical and mathematical literature, 1986. — 232 p.
5. Pantaev M. Yu. Calculus with a human face: in 2 volumes. T. 2. — Moscow : LENAND, 2015. — 368 p.
6. Sivukhin D. V. General course of physics: in 5 volumes. Vol. 4. Optics. — Moscow : Fizmatlit, 2002. — 752 p.
7. Slobodyanyuk A. I. Least squares method in a school physics experiment // Physics: teaching problems. — 1995. — no. 1. — P. 88–89.
8. Yavorsky B. A. Planning a scientific experiment and processing experimental data. — Moscow : Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 2006. — 24 p.

Information about authors:

Olga Viktorovna Makeeva — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Physics, Mathematics and Technological Education of the Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: mov_ulspu@mail.ru

ORCID iD  0000-0003-4345-2296

Web of Science ResearcherID  ABA-2550-2020

SCOPUS ID  24171477100

Daria Vladislavovna Voronova — student of the Faculty of Physics, Mathematics and Technological Education of the Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: iceblitz@mail.ru, iceblitz020898@gmail.com

ORCID iD  0000-0003-2055-9904

Web of Science ResearcherID  ABI-4025-2020