

## Секция 2

---

### Физико-математические науки

---

УДК 524.82  
ББК 22.637  
ГРНТИ 41.29.15  
ВАК 01.03.02

#### Закон Хаббла и масштабный фактор

О. А. Арсенова , С. А. Ачилова , Н. А. Кошелев  <sup>1</sup>

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», 432071, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 13 февраля 2021 года  
После переработки 16 февраля 2021 года  
Опубликована 5 марта 2021 года

---

**Аннотация.** Космология и астрофизика сегодня активно развиваются, большой научный прогресс в этих областях привлекает огромное внимание многих молодых студентов-физиков. Однако имеется фактор, сильно затрудняющий знакомство с современной космологией: даже первые вводные шаги обычно предполагают предварительное изучение понятий общей теории относительности. В первую очередь, желательно иметь физически правильное, прозрачное и интуитивно понятное введение понятия космологического масштабного фактора, с минимальной отсылкой к стандартным учебникам по теории гравитации. С другой стороны, примеры и факты из космологии сами по себе могут помочь освоить необходимые понятия теории гравитационного поля. Сделана попытка ввести понятие космологического масштабного фактора на основе свойства однородности закона Хаббла. Также рассмотрено несколько сопутствующих вопросов.

**Ключевые слова:** закон Хаббла, космологический масштабный фактор

---

<sup>1</sup>E-mail: koshelev.n@ulspu.ru

## Введение

Космология и астрофизика в последние десятилетия находятся на этапе быстрого и уверенного развития. Открытие современного ускоренного космологического расширения [1, 2] сильно изменило представления о Вселенной. Регистрация изотропии космического микроволнового излучения [3] и регистрация гравитационных волн от слияния компактных звездных объектов [4] дали астрофизикам и космологам новые, ранее недоступные, инструменты для её изучения.

Актуальность и значительность недавних изменений физической картины мира подтверждается хотя бы тем, что они уже нашли отражение в школьных программах по астрономии. Столь грандиозные изменения, разумеется, привлекают огромное внимание многих молодых студентов-физиков, выбирающих область будущей специализации, а также студентов физико-математических специальностей педагогических вузов. Однако имеется обстоятельство, сильно затрудняющее знакомство с современной космологией: содержательное знакомство с космологией, как правило, предполагает предварительное изучение основ общей теории относительности.

Для первого знакомства, необходимый минимум знаний из общей теории относительности является относительно небольшим. Одна из основных трудностей здесь, на наш взгляд, заключается в понятии космологического масштабного фактора. Освоение понятия масштабного фактора необходимо для правильного, не формального, понимания расширения Вселенной, красного смещения, реликтового излучения. Также, при обсуждении гравитационно-волновой астрономии, необходимо иметь представление об описании гравитационного поля в рамках общей теории относительности.

С другой стороны, осваивать понятия теории гравитационного поля намного легче, имея перед собой конкретные примеры из астрофизики. Желательно использовать такую возможность. Желательно иметь физически правильное, прозрачное и интуитивно понятное введение понятия масштабного фактора, с минимальной отсылкой к стандартным учебникам [5, 6]. К сожалению, найти идеально подходящее введение такого типа, в доступной литературе, нам не удалось.

В данной работе сделана попытка ввести понятие космологического масштабного фактора на основе свойства однородности закона Хаббла. Также рассмотрено несколько сопутствующих вопросов.

## Однородность и изотропность закона Хаббла

Закон Хаббла — наблюдаемая закономерность, согласно которой галактики движутся от наземного наблюдателя со скоростями, пропорциональными расстоянию до них. Математическая формулировка закона Хаббла может быть дана как [7]:

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r} , \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость галактики,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор галактики, а  $H_0$  — параметр, называемый постоянной Хаббла. Сегодня имеются некоторые разногласия в значении постоянной Хаббла, определённой по разным методиками. Очень консервативной оценкой, согласующейся со всеми наборами наблюдательных данных, является [8]

$$H_0 = 70.3_{-5.0}^{+5.3} \frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}} . \quad (2)$$

Закон Хаббла был предложен Э. Хабблом в 1929 году. Он прекрасно проверен вплоть до расстояний 400 – 500 Мпк.

Хорошо известно, что закон Хаббла однороден и изотропен в рамках классической (нерелятивистской) механики. Действительно, пусть имеются две галактики (1 и 2). Их

скорости равны

$$\mathbf{v}_1 = H_0 \mathbf{r}_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_2 = H_0 \mathbf{r}_2. \quad (4)$$

Относительная скорость второй галактики относительно первой получается вычитанием первого уравнения из второго:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = H_0 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (5)$$

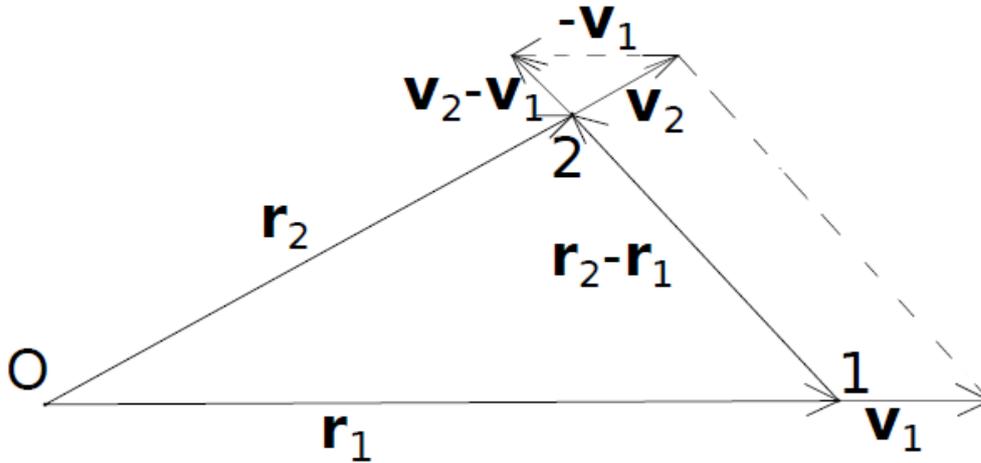


Рис. 1. Иллюстрация однородности закона Хаббла. В точке  $O$  находится покоящийся наблюдатель, от него удаляются две галактики 1 и 2, скорости которых даются законом Хаббла. Скорость галактики 2 относительно галактики 1 оказывается направлена вдоль прямой, их соединяющей. Более того, эта относительная скорость оказывается пропорциональной расстоянию между галактиками, с константой пропорциональности, равной постоянной Хаббла  $H_0$ .

На рис. 1 представлена графическая иллюстрация этого результата. Наглядно видно, что получился тот же самый закон Хаббла, но с наблюдателем в галактике 1. Другими словами, все галактики “разбегаются” друг от друга по одному и тому же закону. Наблюдателя и начало отсчета можно “закрепить” на любой из галактик и закон Хаббла не изменится. Кроме того, нет выделенного направления разбегания галактик — это изотропность закона (1).

### Закон Хаббла и рост расстояний во Вселенной

Далекie галактики удаляются друг от друга, это означает что расстояние между ними увеличивается. Другими словами, расстояние между любыми двумя не притягивающимися галактиками увеличивается. Можно утверждать, что физические расстояния увеличиваются между любыми двумя удалёнными невзаимодействующими телами — это картина расширяющейся Вселенной.

Зафиксируем любые два достаточно далеких тела. В картине расширяющейся Вселенной, физическое расстояние  $r_{12}$  между этими телами с течением времени изменяется по закону

$$r_{12}(t) = \tilde{a}(t, t_*) r_{12}(t_*), \quad (6)$$

где  $\tilde{a}(t, t_*)$  — некоторая функция времени, такая что  $\tilde{a}(t_*, t_*) = 1$ . Момент времени  $t_*$ , указанный как второй параметр, здесь выбран произвольно, поэтому мы можем его не

указывать явно, а писать

$$\frac{r_{12}(t)}{r_{12}(t_i)} = \frac{\tilde{a}(t, t_*)}{\tilde{a}(t_i, t_*)} \equiv \frac{a(t)}{a(t_i)}. \quad (7)$$

Если за какое-то время  $\Delta t$ , прошедшее с момента времени  $t_i$ , расстояние между галактиками увеличилось в 2 раза, то и функция  $a(t)$  увеличится в два раза за то же самое время. Если  $a(t)$  увеличится в два раза, то расстояние между любыми двумя далекими галактиками также удвоится. Формула (7) даёт альтернативное описание расширения Вселенной. Величина  $a(t)$  называется космологический масштабным фактором.

Выше при рассмотрении однородности закона Хаббла (1) использовались классические представления ньютоновской механики о физическом трёхмерном пространстве и абсолютном времени. В любой фиксированный момент времени, глядя на трехмерное пространство как на сцену, на которой в этот момент происходят события, мы видим, что скорость изменения расстояния между двумя выбранными галактиками может оказаться сколь угодно большой. Это чисто геометрический эффект, надо только выбрать пару галактик достаточно далеко друг от друга в этот момент времени. Однако скорость движения массивных тел не может превышать (и даже достигать) скорости света. Значит, изменение физических расстояний между достаточно далекими галактиками нельзя объяснить их перемещением в пространстве.

Также возникает вопрос: куда направлена скорость “убегающей” галактики? Ответ будет зависеть от того, где располагается наблюдатель. Более того, если наблюдателя поместить в произвольную выбранную галактику, то эту выбранную галактику следовало бы считать покоящейся в выражении для закона Хаббла. Для удобства можно выбрать специальную неинерциальную систему отсчёта, в которой далёкие галактики являются опорными телами. Её можно трактовать как некоторое обобщение инерциальной системы отсчёта, поскольку в достаточно малой окрестности любой опорной галактики её отличие от инерциальной системы незначительно. В построенной системе отсчёта, которую называют сопутствующей, все галактики неподвижны (как опорные тела), однако меняются физические расстояния между ними.

Построенную сопутствующую систему отсчёта нельзя рассматривать чисто формально. В общей теории относительности нулевые скорости опорных галактик имеют прямой физический смысл, а изменение физических расстояний между неподвижными галактиками объясняется как эффект гравитации. В рамках общей теории относительности гравитационное поле может проявляться не только через влияние на движение пробных тел, но и через изменение физических расстояний и темпа течения времени [5, 6].

Закон Хаббла в форме (1) справедлив только для скоростей галактик, значительно меньших скорости света. Наблюдения показывают, что он справедлив с очень высокой точностью на расстояниях, меньших 400 Мпк. На больших расстояниях начинают сказываться тонкости, связанные с методами определения расстояний и скоростей. Однако описание на основе расширения пространства (7) остается применимым во всех точках наблюдаемой Вселенной. Момент времени, когда космологический масштабный фактор был равен нулю, принимается за момент рождения нашей Вселенной.

## Космологическое красное смещение

В начале двадцатого века астрономы заметили, что спектральные линии далеких галактик смещаются в сторону больших длин волн. При расстояниях, меньших 500 Мпк, это смещение спектральных линий можно интерпретировать как проявление эффекта Доплера из-за движения источника. Соответствующее рассмотрение приводит к закону Хаббла (1). В общем случае, для описания смещения спектральных линий в спектрах

излучения далеких астрономических объектов, вводят параметр красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_i} - 1, \quad (8)$$

где  $\lambda_0$  – измеренная наблюдателем длина пришедшей волны,  $\lambda_i$  – длина волны в момент излучения, измеренная в системе покоя источника. Самым удаленным из известных объектов сегодня является галактика GN-z11 в созвездии Большой Медведицы. Ее красное смещение  $z = 11.1$ . Между тем, закон Хаббла выполняется в области значений  $z \ll 1$ .

Расширение Вселенной приводит к тому, что длина волны  $\lambda$  свободного электромагнитного излучения при своем распространении также не остаётся постоянной, а растёт вместе с космическим масштабным фактором по закону [5, 6]:

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t_i)} = \frac{a(t)}{a(t_i)}. \quad (9)$$

Это явление носит название космологического красного смещения. Закон роста физической длины свободной электромагнитной волны такой же, как и роста физических расстояний между невзаимодействующими галактиками.

Подстановка выражения (9) в уравнение (8) даёт

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1, \quad (10)$$

где  $t_0$  – физическое (координатное) время сегодня, а  $t_i$  – время в момент излучения наблюдаемого света от удаленного источника. Отсюда, в принципе, по наблюдательным данным можно установить вид функции  $a(t)$ .

Одно из самых ярких проявлений космологического красного смещения – реликтовое космическое микроволновое излучение (радиоизлучение с длинами волн, меньшими одного метра, называют микроволновым) [7, 9]. Это излучение было открыто американскими радиоастрономами Р. Вильсоном и А. Пензиасом в 1964-1965 годах, при пробных астрономических наблюдениях в диапазоне сантиметровых волн. Оно имеет спектр излучения абсолютно чёрного тела с температурой 2.725 К и с очень высокой степенью изотропности. Это излучение осталось со времен, когда ещё не возникли первые звезды и галактики, а Вселенная была почти равномерно заполнена горячей плазмой, находившейся в тепловом равновесии с излучением. По мере расширения Вселенной плазма остывала, пока при температуре около 3000 К электроны и протоны плазмы не объединились в нейтральные атомы водорода. Этот период космологи называют рекомбинацией. После рекомбинации Вселенная стала прозрачной для излучения и кванты света смогли распространяться свободно. Те самые кванты света, которые последний раз рассеивались на электронах плазмы в эпоху рекомбинации, и только сегодня достигли наземного наблюдателя, воспринимаются антеннами как космическое микроволновое излучение. с момента последнего рассеяния длина волны квантов реликтового излучения увеличилась примерно в 1100 раз [7, 9].

## Расширение Вселенной и локальная физика

Стандартно считают, что физические законы со временем не меняются. Например, физические характеристики атомов сегодня и миллиарды лет одни и те же, размер атомов не изменился. Почему так происходит, несмотря на космологическое расширение Вселенной со временем?

Возьмём производную по времени от закона Хаббла (1). Это даёт следующее выражение для ускорения массивной частицы:

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} = H_0 \mathbf{v} . \quad (11)$$

Снова используем закон Хаббла и получим

$$\mathbf{a} = H_0^2 \mathbf{r} . \quad (12)$$

Отсюда видно, что относительно наблюдателя частица движется с положительным ускорением. Имеем картину своеобразного “взрыва”.

С точки зрения классической механики, наличие ускорения означает, что на каждую частицу массой  $m$  действует дополнительная сила (приливного характера)

$$\mathbf{F} = mH_0^2 \mathbf{r} . \quad (13)$$

Эта сила пропорциональна расстоянию до частицы и содержит очень малый множитель  $H_0^2$ . Обычно она компенсируется другими силами, действующими в рассматриваемой системе. В атомах и атомных ядрах гравитационные эффекты вообще не учитываются, в силу их слабости, а в масштабах галактик доминируют силы ньютоновского гравитационного притяжения между массивными телами. В этих гравитационносвязанных системах влияние космического расширения Вселенной пренебрежимо мало и не проявляется.

## Заключение

В данной работе понятия масштабного фактора и сопутствующей системы отсчёта введены формально, исходя из свойства однородности закона Хаббла, которое указывает на однородное увеличение, с течением времени, физических расстояний между достаточно удалёнными галактиками с красными смещениями  $z \ll 1$ . Специфические виды расстояний, рассматриваемые в космологии, здесь не упоминаются. Из общей теории относительности используется только результат (9), выглядящий очевидным. Хотя, тем не менее, упоминается о том, что в рамках общей теории относительности гравитационное поле может влиять на темп течения времени и изменение физических расстояний. При обсуждении понятия масштабного фактора кратко рассмотрено космологическое красное смещение и влияние расширения Вселенной на физику процессов внутри гравитационносвязанных систем. Возможно, результаты работы смогут быть использованы на уроках астрономии в школе при преподавании тем школьного образовательного стандарта космологической тематики.

## Список использованных источников

1. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / Adam G. Riess [et al.] // The Astronomical Journal. — 1998. — sep. — Vol. 116, no. 3. — P. 1009–1038. — URL: <https://doi.org/10.1086/300499>.
2. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae / S. Perlmutter [et al.] // The Astrophysical Journal. — 1999. — jun. — Vol. 517, no. 2. — P. 565–586. — URL: <https://doi.org/10.1086/307221>.
3. Dipole Anisotropy in the COBE Differential Microwave Radiometers First-Year Sky Maps / A. Kogut [et al.] // The Astrophysical Journal. — 1993. — dec. — Vol. 419. — P. 1. — URL: <https://doi.org/10.1086/173453>.

4. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B.P. Abbott [et al.] // Physical Review Letters. — 2016. — feb. — Vol. 116, no. 6. — URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.116.061102>.
5. Ландау Л. Д., Лифши М. Е. Теоретическая физика : учебное пособие. В 10 томах. Том II. Теория поля.— 7-е изд., испр.— Москва : Главное издательство физико-математической литературы, 1988.— 512 с.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. В трёх томах. Том 1. — Москва : Мир, 1977. — 480 с.
7. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. Изд. 3-е. — Москва : УРСС: ЛЕНАНД, 2016. — 616 с.
8. A Hubble constant measurement from superluminal motion of the jet in GW170817 / K. Hotokezaka [et al.] // Nature Astronomy. — 2019. — jul. — Vol. 3, no. 10. — P. 940–944. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41550-019-0820-1>.
9. Вайнберг С. Космология: Пер. с англ., Изд. 2-е. — Москва : УРСС: ЛЕНАНД, 2018. — 608 с.

**Сведения об авторах:**

**Оксана Александровна Арсенова** — студент факультета физико-математического и технологического образования ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», Ульяновск, Россия.

E-mail: [arsenov.oksana@gmail.com](mailto:arsenov.oksana@gmail.com)

ORCID iD  0000-0002-8862-9334

Web of Science ResearcherID  AAF-5685-2021

**Сабина Атамурадовна Ачилова** — студент факультета физико-математического и технологического образования ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», Ульяновск, Россия.

E-mail: [sabiachilova@gmail.com](mailto:sabiachilova@gmail.com)

ORCID iD  0000-0002-6994-2819

Web of Science ResearcherID  AАН-1755-2021

**Николай Анатольевич Кошелев** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и технических дисциплин ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», Ульяновск, Россия.

E-mail: [koshelev.n@ulspu.ru](mailto:koshelev.n@ulspu.ru)

ORCID iD  0000-0002-2897-7396

Web of Science ResearcherID  AAG-6924-2021

SCOPUS ID  7004055260

## Hubble's law and scale factor

O. A. Arsenova , S. A. Achilova , N. A. Koshelev 

*Ulyanovsk State Pedagogical University, 432071, Ulyanovsk, Russia*

Submitted February 13, 2021

Resubmitted February 16, 2021

Published March 5, 2021

---

**Abstract.** Cosmology and astrophysics are actively developing today, the great scientific progress in these areas attracts great attention of many young physics students. However, there is a feature that greatly complicates the acquaintance with modern cosmology: even the first introductory steps usually involve a preliminary study of some concepts of general relativity. Mostly, it is desirable for beginners to have a physically correct, transparent and intuitive introduction of the concept of the cosmological scale factor, with minimal reference to standard textbooks on the gravity theory. On the other hand, some cosmological examples and facts by themselves can help to assimilate the necessary concepts of the theory of the gravitational field. In this paper, an attempt is made to introduce the concept of the cosmological scale factor based on the homogeneity property of the Hubble law. Some related issues are also discussed.

**Keywords:** Hubble's law, cosmological scale factor

PACS: 98.80.Es

---

### References

1. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / Adam G. Riess [et al.] // *The Astronomical Journal*. — 1998. — sep. — Vol. 116, no. 3. — P. 1009–1038. — URL: <https://doi.org/10.1086/300499>.
2. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae / S. Perlmutter [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 1999. — jun. — Vol. 517, no. 2. — P. 565–586. — URL: <https://doi.org/10.1086/307221>.
3. Dipole Anisotropy in the COBE Differential Microwave Radiometers First-Year Sky Maps / A. Kogut [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 1993. — dec. — Vol. 419. — P. 1. — URL: <https://doi.org/10.1086/173453>.
4. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B.P. Abbott [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — feb. — Vol. 116, no. 6. — URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.116.061102>.
5. Landau L. D., Lifshis M. E. *Theoretical physics: textbook*. In 10 volumes. Volume II. Field theory. - 7th ed., Rev. — Moscow : Main publishing house of physical and mathematical literature, 1988. — 512 p.
6. Misner Ch., Thorne K., Wheeler J. *Gravity*. In three volumes. Volume 1. — Moscow : Mir, 1977. — 480 p.
7. Gorbunov D. S., Rubakov V. A. *Introduction to Theory of the Early Universe: The Hot Big Bang Theory*. Ed. 3rd. — Moscow : URSS: LENAND, 2016. — 616 p.

8. A Hubble constant measurement from superluminal motion of the jet in GW170817 / K. Hotokezaka [et al.] // Nature Astronomy. — 2019. — jul. — Vol. 3, no. 10. — P. 940–944. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41550-019-0820-1>.
9. Weinberg C. Cosmology: Translation from English, Ed. 2nd. — Moscow : URSS: LENAND, 2018. — 608 p.

**Information about authors:**

**Oxana Alexandrovna Arsenova** — student of the Faculty of Physics, Mathematics and Technological Education of the Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: [arsenov.oksana@gmail.com](mailto:arsenov.oksana@gmail.com)

ORCID iD  0000-0002-8862-9334

Web of Science ResearcherID  AAF-5685-2021

**Sabina Atamuradovna Achilova** — student of the Faculty of Physics, Mathematics and Technological Education of the Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: [sabiachilova@gmail.com](mailto:sabiachilova@gmail.com)

ORCID iD  0000-0002-6994-2819

Web of Science ResearcherID  AAH-1755-2021

**Nikolay Anatolevich Koshelev** — Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Technical Disciplines of the Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: [koshelev.n@ulspu.ru](mailto:koshelev.n@ulspu.ru)

ORCID iD  0000-0002-2897-7396

Web of Science ResearcherID  AAG-6924-2021

SCOPUS ID  7004055260