УДК 372.851
ББК 74.262.21
ГРНТИ 27.43.51
ВАК 01.01.05

Парадоксы теории вероятностей как элемент элективного курса по математике в старшей школе

Е. А. Купреянова, О. В. Макеева [1]

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», 432071, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 2 июля 2020 года
После переработки 2 октября 2020 года
Опубликована 10 октября 2020 года

Аннотация. Построение элективного курса по теории вероятностей для старшей школы с использованием задач-парадоксов позволяет достаточно нестандартно систематизировать содержание раздела, встраивать новые сведения в систему уже освоенных знаний. Именно этим задачам посвящена настоящая работа. Приведена и проиллюстрирована примерами классификация задач-парадоксов теории вероятностей. Предложен фрагмент содержания авторского курса, включающий знакомство с классификацией парадоксов и освоение примеров решений таких задач.

Ключевые слова: парадоксы теории вероятностей, математическое образование, элективный курс по математике

Введение

Парадоксы — это неожиданные утверждения, противоречащие здравому смыслу или общепризнанным научным теориям. Очень часто их рассматривают как ошибки, хотя в большинстве случаев они таковыми не являются. Обычно парадоксы построены на логически верных заключениях, но их противоречивый результат не является преднамеренным (этим они отличаются от софизмов). Парадоксы известны науке уже более двух тысяч лет. В античные времена были описаны многие парадоксы и для некоторых из них учёные до сих пор не могут найти объяснения и решения. Открываются парадоксы и в наши дни. Обычно подобные открытия сопровождаются кризисами в науке, разрушением старых, проверенных временем теорий и попытками создать новые, которые способны объяснить появившиеся противоречия. Количество существующих парадоксов огромно. Они присутствуют везде — и в повседневной жизни, и в науке. Практически в каждой научной области исследования существуют свои парадоксы.

Задачи–парадоксы теории вероятностей

В теории вероятностей выделяют парадоксы двух типов. Первый тип — это задачи, для которых существует строгое решение в рамках общепринятой аксиоматики, но оно не очевидно, и условия задачи таковы, что ведут понимание условий в ошибочном ключе. Примерами таких парадоксов являются Санкт-Петербургский парадокс, Парадокс

[1]E-mail: mov_ulspu@mail.ru

закона больших чисел Бернулли, Парадокс дней рождения. Второй тип — это парадоксы, которые основываются на неоднозначной интерпретации аксиоматики теории вероятностей, её недоопределённости, которую отмечал в своих работах ещё Анри Пуанкаре (1854 – 1912), их и можно назвать истинными парадоксами. Примеры таких парадоксов: Проблема Монти Холла, Парадокс двух конвертов, Парадокс Хемпеля, Парадокс Бертрана [1, 2]. Ценность обоих типов парадоксов в том, что они помогают лучше понять суть теории вероятностей, область её применения и естественные ограничения, глубже понять основания науки.

Приведем пример парадокса, который относятся к первому типу.

Парадокс Симпсона. Парадокс Симпсона — контринтуитивное явление в статистике, состоящее в том, что при объединении групп, в каждой из которых наблюдается некоторая определенная зависимость, зависимость исчезает или становится противоположной. Это явление в 1903 году было описано Удни Юлом (1871 – 1951), а в 1951 году — Эдвардом Симпсоном (1922 - 2019). Впервые подобная ситуация отмечена Карлом Пирсоном (1857 – 1936) в статье «Математический вклад в теорию эволюции» (1899), где он рассматривает зависимость признаков разнородных групп лошадей. У. Юл на основе изучений механизмов наследственности провел более подробный анализ подобных популяционных изменений. Э. Симпсон рассматривает то, что он называет «любопытным случаем» в нескольких разделах статьи «The Interpretation of Interaction in Contingency Tables». Симпсон был первым автором, изучавшим это явление с точки зрения статистики. Именно поэтому впоследствии К. Р. Блайт в статье «On Simpson's Paradox and the Sure-Thing Principle» (1972) вводит термин «парадокс Симпсона».

Рассмотрим пример, иллюстрирующий этот парадокс. Пусть есть четыре шляпы (две чёрных и две серых), 41 фишка (23 цветных и 18 белых) и два стола (А и Б). Фишки распределены по шляпам следующим образом: в чёрной шляпе на столе А лежат 5 цветных и 6 белых фишек; в серой шляпе на столе А лежат 3 цветные и 4 белые фишки; в чёрной шляпе на столе Б лежат 6 цветных и 3 белых фишки; в серой шляпе на столе Б лежат 9 цветных и 5 белых фишек.

Стол А Стол Б

Рис. 1. Иллюстрация парадокса Симпсона.

На рис. 1 изображена иллюстрация парадокса Симпсона.

Требуется вынуть цветную фишку.

Решение. Если вы находитесь около стола А, то вероятность извлечь цветную фишку из чёрной шляпы равна $5/11 = 35/77$, а из серой шляпы на том же столе — $3/7 = 33/77$; таким образом, имеется больше шансов вынуть цветную фишку из чёрной шляпы, чем из серой. Если вы находитесь около стола Б, то вероятность извлечь цветную фишку из чёрной шляпы равна $6/9 = 84/126$, а из серой шляпы — $9/14 = 81/126$; таким образом, и здесь шансы вынуть цветную фишку из чёрной шляпы, выше чем из серой.

Допустим теперь, что фишки из двух чёрных шляп сложены в одну чёрную шляпу, а фишки из двух серых шляп – в одну серую шляпу. Логично было бы предположить, что вероятность выбрать цветную фишку из чёрной шляпы выше, чем из серой шляпы. Но это неверно! Вероятность вынуть цветную фишку из чёрной шляпы равна $11/20 = 231/420$, а вероятность вынуть цветную фишку из серой шляпы равна $12/21 = 240/420$. Таким образом, больше шансов извлечь цветную фишку из серой шляпы, чем из чёрной шляпы.

Причина парадокса скрывается в некорректном усреднении двух групп данных с различной долей контрольных наблюдений. Поскольку интуитивно предполагается, что при применении найденных зависимостей доля контрольных будет одинаковой в обеих группах, а в исходных данных это не выполняется, то к ним нельзя применять арифметическое усреднение:

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2}\,, \quad \frac{m_3}{n_3} > \frac{m_4}{n_4}\,, \quad \not\Leftrightarrow \quad \frac{m_1+m_3}{n_1+n_3} > \frac{m_2+m_4}{n_2+n_4}\,. \tag{1}$$

Для устранения проблемы, при усреднении необходимо использовать веса, устраняющие перекос доли контрольных наблюдений. Так, в примере с фишками доля фишек в серой шляпе на столе А – 7 из 18 (39%), а на столе Б – 14 из 23 (61%). Для репрезентативного усреднения шанса вытянуть цветную фишку достаточно умножить количество фишек обоих цветов в одной из шляп на весовой коэффициент, устраняющий перекос.

Другой способ разрешения парадокса — использование формулы полной вероятности. Она позволяет вычислить вероятность интересующего события через условные вероятности этого события в предположении неких гипотез, а также вероятностей этих гипотез. Так, если C – событие, состоящее в том, что цветная фишка извлечена из серой шляпы, гипотеза H_1 – выбрана серая шляпа со стола А и $C|H_1$ – выбрана цветная фишка из серой шляпы стола А, гипотеза H_2 – выбрана серая шляпа со стола В и $C|H_2$ – выбрана цветная фишка из серой шляпы стола В, тогда

$$P\left(C\right) = P\left(H_1\right) P_{H_1}\left(C\right) + P\left(H_2\right) P_{H_2}\left(C\right) = \frac{7}{18}\cdot\frac{3}{4} + \frac{14}{23}\cdot\frac{9}{5}\,. \tag{2}$$

Парадокс Симпсона показывает, что выводы из результатов социологических опросов с нерепрезентативной выборкой нельзя принимать как обоснованные, доказанные научным путём.

Далее приведем примеры задач-парадоксов, которые можно отнести ко второму типу.

Парадокс раздела ставки. Два игрока играют в честную игру (то есть у обоих шансы победить, одинаковы), и они договорились, что тот, кто первым выиграет 6 партий, получит весь приз. Предположим, что игра остановилась до того, как один из участников выиграл приз (например, первый игрок выиграл 5 партий, а второй – 3). Как следует справедливо разделить приз?

Решение. Согласно одному ответу, приз следовало разделить пропорционально выигранным партиям, то есть 5:3. Николо Тарталья (1499 – 1557) предложил делить выигрыш в отношении 2:1. Возможные рассуждения таковы: так как первый игрок выиграл на две партии больше, что составляет третью часть от необходимых для победы 6 партий, то первый игрок должен получить одну треть от приза, а оставшуюся часть следует разделить пополам. На самом деле справедливым является раздел выигрыша в отношении 7:1, что отличается от предыдущих результатов. Блез Паскаль и Пьер Ферма рассматривали эту проблему как задачу о вероятностях. Справедливым будет раздел ставки, пропорциональный шансам первого игрока выиграть приз. Следуя идее Ферма, продолжим игру тремя фиктивными партиями, даже если некоторые из них окажутся лишними (то есть когда один из игроков уже выиграл приз). Такое продолжение делает все возможных исходов равновероятными. Первый игрок может победить после 9-й партии с вероятностью 1/2, или после 10-й партии с вероятностью 1/4, или после 11-й партии с вероятностью 1/8, то есть вероятность выигрыша первого игрока составит 1/2+1/4+1/8= 7/8.

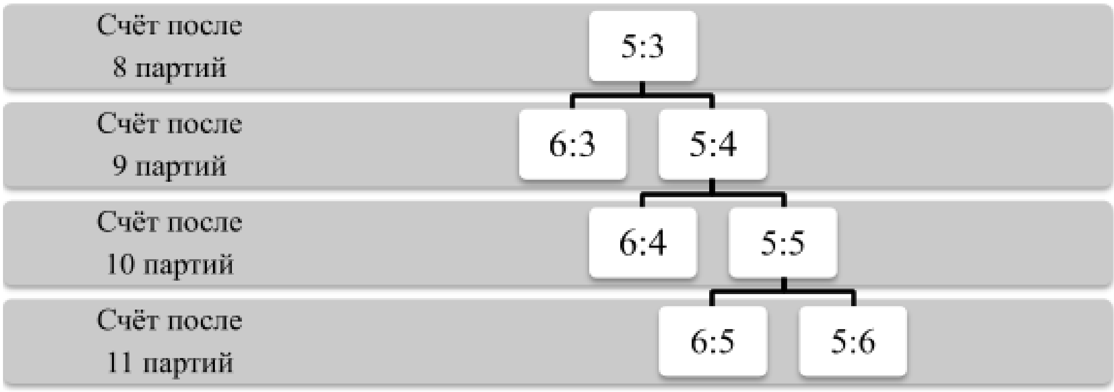

Рис. 2. Иллюстрация парадокса раздела ставки.

На рис. 2 изображена иллюстрация парадокса раздела ставки.

Поскольку только при одном исходе второй игрок получает приз (то есть когда он выигрывает все три партии — 9-ю, 10-ю, 11-ю, вероятность этого события составляет 1/8), а в остальных случаях побеждает первый игрок, справедливым является отношение 7:1.

Парадокс мальчика и девочки. Впервые задача была сформулирована в 1959 году американским математиком и писателем Мартином Гарднером (1914-2010) в журнале «Scientific American» под названием «The Two Children Problem». В семье подрастают двое детей. Известно, что один из них мальчик, каковы шансы того, что другой ребенок тоже мальчик?

Решение.

Интуиция подсказывает, что ответ 1/2, так как это может быть или мальчик, или девочка, но это не так. Правильный ответ — 1/3.

Решение 1.

Рис. 3. Иллюстрация первого варианта решения парадокса мальчика и девочки.

На рис. 3 изображена иллюстрация первого варианта решения парадокса мальчика и девочки.

Решение 2.

Есть четыре варианта для семьи с двумя детьми: старший мальчик и младшая девочка (МД), старший мальчик и младший мальчик (ММ), старшая девочка и младший мальчик (ДМ) или старшая девочка и младшая девочка. Вариант ДД невозможен, потому что в семье уже есть один мальчик. Таким образом, возможны лишь варианты МД, ММ и ДМ. Вероятность 1/3.

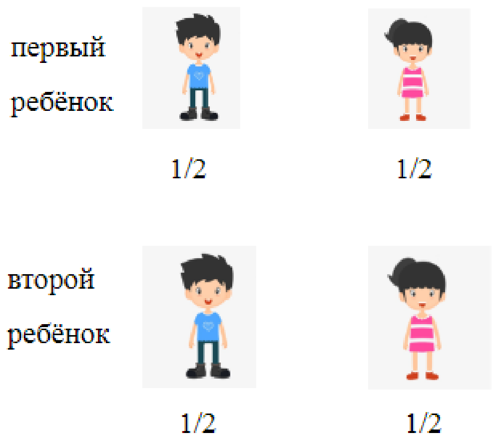

Рис. 4. Иллюстрация второго варианта решения парадокса мальчика и девочки.

На рис. 4 изображена иллюстрация второго варианта решения парадокса мальчика и девочки.

В первом случае рассматривались семьи, подпадающие под обязательное условие «должен быть один мальчик». Во втором — все возможные варианты семьи, когда пол для второго ребёнка определялся с учётом условия, каким был первый ребёнок в семье (условная вероятность).

Парадокс Банаха-Тарского. Это классический пример парадокса второго типа [3]. Представьте себе, что вы держите в руках шар. А теперь представьте, что вы начали рвать этот шар на куски, причём куски могут быть любой формы, какая вам нравится. После сложите кусочки вместе так, чтобы у вас получилось два шара, а не один исходный. Каков будет размер этих шаров по сравнению с шаром-оригиналом?

Парадокс заключается в том, что два полученных шара могут быть такого же размера и формы, как шар-оригинал. В соответствии с теорией меры, возможно разорвать шары на куски любой формы, содержащие бесконечное число нульмерных точек. На практике сделать это невозможно — структура материала и в конечном итоге размер атомов накладывают ограничения.

Оригинальное, ориентированное на практику содержание задач-парадоксов теории вероятностей, живая персонифицированная история возникновения проблемных ситуаций делает их привлекательным материалом для построения элективного курса по математике в старшей школе, среди возможных задач которого содержится профилизация обучения через знакомство с историей науки.

Приведем пример системы занятий, построенной на материале задач-парадоксов теории вероятностей.

Занятие 1. Задачи-парадоксы теории вероятностей. Что это?

Тип урока: урок — лекция.

Содержательная цель: введение понятия «парадокс» и рассмотрение примеров задач-парадоксов теории вероятностей.

Деятельностная цель: создание условий для получения опыта коллективной деятельности по изучению парадоксов теории вероятностей.

Основополагающая цель: формирование представлений о целостности математического знания и внутренней мотивации к саморазвитию.

Ожидаемые результаты: в предметном направлении: освоение понятия «парадокс» в теории вероятностей и осмысление возможности решать задачи-парадоксы классическими методами теории вероятностей; в метапредметном направлении: развитие критичности мышления через самоконтроль и взаимоконтроль; в направлении личностного развития: изменение мировоззренческих позиций, связанных с осмыслением возможности проникновения математических знаний в реальную жизнь.

Материально-техническое обеспечение: компьютер, проектор, интерактивная доска.

Этапы урока.

Организационный этап: приветствие, объявление темы, содержательной цели урока (3 минуты).

Актуализация знаний: эксперимент, событие, вероятность события, случайная величина и её математическое ожидание (3 минуты).

Основная часть.

А. Исследование ситуаций, допускающих вариативность ответа и приводящих к понятию парадокса (5 минут).

«– Сказанное Платоном – ложно», – говорит Сократ.

«– То, что сказал Сократ, – истина», – говорит Платон.

Вопрос: кто из них высказывает истину, а кто ложь?

В какой момент «куча» перестает ею быть и когда становится ею?

Б. Разбор нескольких определений термина «парадокс». Выбор «рабочего» определения (15 минут).

Парадокс — это высказывание, которое доказывает, как истинность, так и ложность некоторого предложения, выраженное формально-логическими средствами, кажущимися заведомо приемлемыми, но приводящими к заведомо неприемлемому результату.

Парадокс — логическое противоречие, из которого невозможно найти выход (неразрешимая ситуация в рассуждении).

Парадокс — высказывание либо рассуждение, приводящее к двум противоположным, но равнозначным выводам.

Парадокс — это положение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися, ортодоксальными мнениями.

В. Классификация задач-парадоксов с примерами (15 минут).

Первый тип.

Существует строгое решение задачи в рамках аксиоматики, но не очевидное, и условия задачи ведут интуитивное понимание условий в ошибочном ключе.

Пример. Санкт-Петербургский парадокс.

Единичное испытание в петербургской игре состоит в бросании правильной монеты до тех пор, пока не выпадет «решка». Если это произойдет при r-м бросании, игрок получает $2r$ долларов из банка. Таким образом, с каждым бросанием выигрыш удваивается. Вопрос: сколько следует заплатить игроку за участие в игре, чтобы игра стала безобидной?

Решение.

Среднее значение чистого выигрыша должно быть равно 0. Однако это требование невыполнимо, какую бы (конечную) сумму денег игрок ни заплатил. Потери банка имеют бесконечное математическое ожидание, так как вероятность окончания игры при k-м бросании равна $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ и в этом случае игрок получает 2^k долларов. Тогда банк в среднем должен заплатить

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\ldots=1+1+1+\ldots\ . \qquad (3)$$

долларов, что составляет бесконечно большую сумму денег, так что игра стала бы безобидной при бесконечном взносе. Хотя все математические вычисления корректны, результат неприемлем, поэтому некоторые математики предположили реализуемые модификации. Бюффон (1707 – 1788), Крамер (1704 – 1752) и другие предложили исходить из естественного предположения об ограниченности ресурсов. Пусть в банке есть миллион долларов. Тогда математическое ожидание выигрыша для игрока равно

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\ldots+\frac{2}{2^{10}}\cdot 2^{10}+\left(\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{2^{21}}+\ldots\right)\cdot 10^6=19+1.9\approx 21\ . \qquad (4)$$

Мы учли, что $2^{20}>10^6$. Следовательно, при вступительном взносе игрока, равном 21 доллару, игра станет в некоторой степени выгодной для банка.

Второй тип.

Основываются на неоднозначной интерпретации аксиоматики теории вероятностей, её недоопределённости (истинные парадоксы).

Пример. Парадокс двух конвертов.

Имеется два конверта. В один из них вкладывается сумма x, во второй – $2x$. Значение x неизвестно и каждый раз случайно изменяется. Конверты неразличимы. Игрок открывает один из конвертов и видит лежащую там сумму. У него есть две возможности — забрать её или выбрать второй, нераспечатанный конверт. Какая из этих возможностей в среднем даст большую прибыль?

Решение.

Допустим, вы увидели 10\$. Значит, в другом конверте либо 5\$, либо 20\$ с шансами 1:1. Средневзвешенная сумма во втором конверте равна: $0.5\cdot 5\$+0.5\cdot 20\$=12.5$. Открыв альтернативный конверт, вы увидите либо 20 долларов, либо 5 долларов. Но 12.5 долларов – такова (по вычислениям), как кажется, будет средняя сумма выигрыша на кон при проведении достаточно большого числа раундов, если всегда менять конверты. И этот результат не зависит от первоначальной суммы денег. То есть в общем виде, если в конверте А лежит сумма C, то статистически ожидаемая сумма в конверте В составит $0.5\cdot\frac{C}{2}+0.5\cdot 2C=\frac{5}{4}C$. Таким образом, всегда выгодно менять свой первоначальный выбор, хотя в отдельных раундах и возможны проигрыши.

Подведение итогов. Рефлексия. (4 минуты)

Занятие 2. Парадокс Симпсона.

Тип урока: урок решения одной задачи.

Содержательная цель: изучение альтернативных решений задачи-парадокса.

Деятельностная цель: создание условий для получения опыта коллективной деятельности по генерированию альтернативных логических цепочек рассуждений.

Основополагающая цель: развитие критичности мышления и способности к самоконтролю

Ожидаемые результаты: в предметном направлении: расширение представлений о задачах – парадоксах и способах их решения; в метапредметном направлении: освоение опыта специфической деятельности по получению нового знания, его преобразованию и применению; в направлении личностного развития: формирование приёмов нестандартного мышления при решении поставленных задач.

Материально-техническое обеспечение: компьютер, проектор, интерактивная доска.

Этапы урока.

Организационный: приветствие, объявление темы, содержательной цели урока. (3 минуты)

Актуализация знаний: понятие парадокса, виды парадоксов теории вероятностей. (4 минуты)

Основная часть.

А. Описание парадокса и история его происхождения. (7 минут)

Парадокс Симпсона — статистический парадокс, согласно которому фактор, больше проявляющийся при любых фоновых условиях, чем противоположный ему, проигрывает менее эффективному, но относительно часто встречающемуся фактору.

Б. Поиск решения задачи в микрогруппах. Класс делится на несколько приблизительно равных групп и на основе «мозгового штурма» учащиеся решают задачу. Предполагаются подсказки учителя, направляющие разные группы обучающихся по разным альтернативным направлениям рассуждений (13 минут).

В. Обсуждение и сопоставление вариантов решения парадокса (13 минут).

Подведение итогов. Рефлексия (5 минут).

Заключение

В концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования, утвержденной приказом Министерства образования России от 18.07.02 № 2783 [4], обозначены цели перехода к профильному обучению, среди которых можно выделить создание условий для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими возможностями построения индивидуальных образовательных программ.

Предложенный фрагмент системы занятий содержит идею авторского элективного курса, ориентированного на организацию получения обучающимися личного опыта по применению нестандартных приёмов рассуждений и использованию инструментов решения математических задач вероятностными методами.

Список использованных источников

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. — Москва : Мир, 1990. — 240 с.

2. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — Москва : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975. — 112 с.

3. Кранц С. Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя проверить. — Москва : Лаборатория знаний, 2016. — 320 с.

4. Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования: федеральный закон от 18 июня 2002 г. № 2783 // Официальные документы в образовании. — 2002. — № 4. — С. 3–31. — URL: http://docs.cntd.ru/document/901837067.

Сведения об авторах:

Ольга Викторовна Макеева — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики факультета физико-математического и технологического образования ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова».

E-mail: mov_ulspu@mail.ru

ORCID iD 0000-0003-4345-2296

Web of Science ResearcherID ABA-2550-2020

SCOPUS ID 24171477100

Евгения Александровна Купреянова — студент факультета физико-математического и технологического образования ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова».

E-mail: kupreyanova.zhenechka@mail.ru

ORCID iD 0000-0002-9848-1273

Web of Science ResearcherID AAZ-8152-2020

Paradoxes of probability theory as an element in elective mathematics in secondary school

E. A. Kupreyanova, O. V. Makeeva

Ulyanovsk State Pedagogical University, 432071, Ulyanovsk, Russia

Submitted July 2, 2020
Resubmitted October 2, 2020
Published October 10, 2020

Abstract. The construction of an elective course in probability theory for high school using paradox tasks allows us to systematize the content of the section in a rather non-standard way, to embed new information in the system of already mastered knowledge. These tasks are dedicated to the present work. Classification of probabilistic problems-paradoxes of probability theory is given and illustrated with examples. A fragment of the content of the author's course is proposed, including an introduction to the classification of paradoxes and the development of examples of solutions to such problems.

Keywords: paradoxes of probability theory, mathematical education, elective course in mathematics

References

1. Sekey G. Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. — Moscow : Mir, 1990. — 240 p.

2. Mosteller F. Fifty entertaining probabilistic problems with solutions. — Moscow : Main edition of physical and mathematical literature of the publishing house "Nauka", 1975. — 112 p.

3. Krants S. The volatile nature of mathematical proof. Proof cannot be verified. — Moscow : Knowledge Lab, 2016. — 320 p.

4. On approval of the Concept of profile education at the senior level of general education: Federal Law No. 2783 of June 18, 2002 // Official documents in education. — 2002. — no. 4. — P. 3–31. — URL: `http://docs.cntd.ru/document/901837067`.

Information about authors:

Olga Viktorovna Makeeva — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Physics, Mathematics and Technological Education

E-mail: mov_ulspu@mail.ru
ORCID iD 0000-0003-4345-2296
Web of Science ResearcherID ABA-2550-2020
SCOPUS ID 24171477100

Evgenia Aleksandrovna Kupreyanova — student of the Faculty of Physics, Mathematics and Technological Education of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Ulyanovsk State Pedagogical University".

E-mail: kupreyanova.zhenechka@mail.ru
ORCID iD 0000-0002-9848-1273
Web of Science ResearcherID AAZ-8152-2020