УДК 519:85

ББК 22:18

Методические рекомендации к применению двойственных задач в рамках внеурочной деятельности школьников и при работе в классах с углубленным изучением экономики

Трошина Елизавета Александровна,

магистрант 2 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Методология математического образования» ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Глухова Наталья Владимировна,

кандидат биологических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Аннотация. В работе рассмотрены некоторые подходы к введению двойственных задач экономического характера для учащихся классов экономического профили или как материалы внеурочной деятельности. Обосновывается полезность и возможность рассмотрения такого рода задач со школьниками. Приводятся конкретные примеры заданий и краткая методика обучения их решению.

Ключевые слова. Двойственные задачи, линейное программирование, симплекс-методы, математическое моделирование в экономике.

Guidelines for the use of dual tasks in the framework of extracurricular activities of schoolchildren and when working in classes with in-depth study of the economy

Troshina Elizaveta A.,
2nd year undergraduate of the Faculty of Physical, Mathematical and Technological Education, profile "Methodology of Mathematical Education", Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

Glukhova Natalya V.,
Candidate of Biological Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

Annotation. The paper considers some approaches to the introduction of dual tasks of an economic nature for students of classes in economic profiles or as materials for extracurricular activities. The usefulness and the possibility of considering such problems with schoolchildren are substantiated. Concrete examples of tasks and a brief methodology for teaching them how to solve are given.

Keywords: Dual tasks, linear programming, simplex methods, mathematical modeling in economics.

В школьном курсе наиболее типичными программными вопросами являются задачи на проценты (по вкладам, кредитам), а также задачи на нахождения экстремумов функций при помощи производной (классические задачи, в которых нужно огородить участок наибольшей площади, используя наименьшее число материалов на строительство забора, или собрать коробку наибольшего объема из заданного количества материала). Материалы по подобным задачам весьма многочисленны в настоящее время. Объединением двух данных типов задач являются простейшие оптимизационные задачи, в которых необходимо сопоставить различные методы погашения кредита между собой и выбрать из них лучший. Задачи такого рода не включались до настоящего момента в ЕГЭ, но их легко сформулировать учителю самому из имеющихся задач на кредиты, объединив различные схемы погашения кредита, но сохранив одинаковые суммы и процентные ставки. Более интересными и практически значимыми являются задачи, которые включаются в сборники для подготовки к ЕГЭ – это задачи на нахождения оптимального выбора из ряда возможных вариантов, которые решаются методами математического программирования. При этом изучению данного метода в школьной программе времени не уделяется. В то же время методы эти сравнительно просты и могут быть доступны школьникам. Учебники же для вузов [см. 4, 5, 6], ориентированные на экономические специальности изобилуют именно такими задачами, поэтому кажется целесообразным изучение некоторых из данного класса задач (весьма широкого) и в рамках школьного курса в классах с экономическим профилем. Во всяком случае, методы линейного программирования являются вполне доступными для школьников, позволяют отработать умение составлять модели и оперировать с ними, а также закрепить базовые математические умения (такие как умение строить и читать графики, решать системы уравнений и неравенств, выполнять преобразования выражений, грамотно осуществлять вычисления). Если такие задачи можно рекомендовать для работы со всеми школьниками, планирующими сдавать ЕГЭ на профильном уровне, то для классов с углубленным изучением экономики возможно расширить данный класс задач двойственными задачами (о возможности построения такого элективного курса ранее было написано в работе [7]). В настоящей работе мы более подробнее остановимся на конкретных материалах для работы со школьниками классов экономического профиля.

Введение понятия двойственности со школьниками можно начать с экономического примера.

«Для изготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг)			Общее количество сырья
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия	9	10	16	

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях, но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной» [1, № 1.103, с. 105]. При этом, при формулировке задачи учитель может либо сам задать конкретные виды изделий и сырье, либо может предложить детям самим придумать, что именно они хотели бы производить, а также какое сырье для этого потребуется. Для удобства работы числовые данные могут быть использованы те же, что и в указанной выше таблице, но можно использовать вполне конкретные формулировки, например, для производства трех видов тортов медовых, бисквитных и йогуртных требуются крем, коржи и вкусовая добавка.

Школьники уже знакомые с математическим моделированием и симплекс-методом составляют модель данной задачи. Допустим, что изделия видов A, B, C будут произведены в количествах x_1, x_2, x_3. Для определения оптимального плана следует найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$F(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Прежде чем решать эту задачу, учитель предлагает школьникам альтернативный вопрос. Пусть имеется конкурирующая фирма, которая хочет скупить все наше сырье и ей необходимо установить цену на каждый вид сырья, по которой она собирается его покупать. Далее учитель предлагает учащимся подумать какова будет целевая функция для фирмы конкурента. После обсуждения школьники приходят к выводу, что суммарные затраты фирмы на все сырье должны быть как можно меньше, но вместе с тем цены должны быть и достаточно разумными, для того чтобы наша фирма согласилась продать свои ресурсы. Поэтому если за y_1 обозначить цену за единицу первого ресурса, y_2 – цену за единицу второго ресурса, а за y_3 – цену за третий ресурс, то целевая функция фирмы-конкурента будет иметь вид:

$$F(y) = 360y_1 + 192y_2 + 180y_3 \to \min.$$

Допустим, что наша фирма продаст не весь свой объем ресурсов, а только ту его часть, которая необходима для производства одной единицы изделия вида А. Тогда она получит за это $18y_1 + 6y_2 + 5y_3$ денежных единиц от фирмы-конкурента. Поскольку от продажи одной единицы изделия вида А наша фирма может получить прибыль 9 денежных единиц, ей будет не выгодно продавать свои ресурсы, если она получит в результате меньше. Если же наша фирма получит от другой фирмы ровно столько же, то выгоднее продать ресурсы сразу, ничего не производя (то есть ничего не делая, получить ту же прибыль). Поэтому мы получаем неравенство-ограничения для задачи конкурирующей фирмы $18y_1 + 6y_2 + 5y_3 \ge 9$. Аналогично рассматривая продукты В и С, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 18y_1 + 6y_2 + 5y_3 \ge 9 \\ 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 10 \\ 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 \ge 16 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Получившаяся задача называется двойственной, так как она тесно связана с исходной, но является во многом ее противоположностью, своего рода «перевертышем». Если рассмотреть матрицу, составленную из коэффициентов системы ограничений исходной задачи и двойственной задачи, то можно увидеть, что строки первой матрицы стали столбцами во второй матрице. Если учащиеся не были знакомы с этим ранее, то отмечается, что преобразование, когда новая матрица, получена из исходной матрицы заменой строк на столбцы, называется транспонированием матрицы. Кроме того:

1) Исходная задача была на нахождение максимума, а двойственная на нахождение минимума.

2) В исходной задачи все ограничения были $\leq$, а в двойственной $\geq$.

3) Коэффициенты целевой функции исходной задачи стали свободными членами в системе ограничений двойственной задачи. А также, свободные члены исходной задачи стали коэффициентами целевой функции двойственной задачи. Далее возможно введение общей формулировки двойственной задачи. Пару взаимно-двойственных задач можно решать совместно с помощью одних и тех же симплекс-таблиц. Переход от решения прямой задачи к двойственной определяется основной теоремой двойственности, которую для школьников достаточно сформулировать без доказательства (доказательство будет приведено в главе 3):

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причем оптимальные значения функции цели прямой и двойственной задач совпадают, т.е. min F(x) = max G(y) [8].

Задача 1	Задача 2
$\left.\begin{matrix} x_{n+1} = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+m} = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m \end{matrix}\right\}(1)$ максимизировать	$\left.\begin{matrix} y_{m+1} = -a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m + c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{m+n} = -a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m + c_n \end{matrix}\right\}(1')$ максимизировать

$F(x) = -c_1x_1 - \cdots - c_nx_n$ (2) при условии не отрицательности всех неизвестных	$G(y) = b_1y_1 + \cdots + b_my_m$ (2′) При условии не отрицательности всех неизвестных

Здесь можно отметить еще одну связь исходной и двойственной задачами. Количество исходных переменных в первой задаче совпадает с количеством искусственных переменных во второй задачи и наоборот.

Сравнивая системы уравнений (1) и (1′), заметим, что можно установить между их неизвестными соотношения:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \cdots & x_n & & x_{n+1} & \cdots & x_{n+m} \\ | & & | & & | & & | \\ y_{m+1} & \cdots & y_{m+n} & & y_1 & \cdots & y_m \end{array}$$

Также можно отметить, что с учетом того, что матрицы исходной и двойственной задачи являются транспонированными, то ответы для двойственной задачи находятся не в столбце свободных членов, а в столбце коэффициентов целевой функции. При этом, с учетом того, что решаемая задача на максимум требует замены целевой функции на противоположную ей, ответы в нижней строке получаются отрицательные. Поэтому у результатов для двойственной задачи необходимо сменить знак [2, с. 13 – 17]. Вернемся к решению рассмотренного выше примера. Приведем исходную задачу к каноническому виду. F(x) = – G(x).

$$G(x) = 0 - (9x_1 + 10x_2 + 16x_3) \to \min$$

$$\begin{cases} x_4 = 360 - (18x_1 + 15x_2 + 12x_3) \\ x_5 = 192 - (6x_1 + 4x_2 + 8x_3) \\ x_6 = 180 - (5x_1 + 3x_2 + 3x_3) \end{cases}$$

	Св. член	x_1	x_2	↓ x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	360	18	15	12	1	0	0
→ x_5	192	6	4	8	0	1	0
x_6	180	5	3	3	0	0	1

G(x)	0	9	10	16	0	0	0

	Св. член	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
→ x_4	72	9	9	0	1	-3/2	0
x_3	24	¾	1/2	1	0	1/8	0
x_6	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
G(x)	-384	-3	2	0	0	-2	0

	Св. член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
x_3	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
x_6	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
G(x)	- 400	-5	0	0	-2/9	-5/3	0

Из последней таблицы видно, что оптимальным является план производства изделий, при котором изготавливается 8 изделий вида В и 20 изделий вида С. При данных условиях общая стоимость изделий равна 400 денежных единиц.

Перейдем теперь к двойственной задаче. По основной теорем двойственности значение целевой функции для нее совпадает со значением целевой функции исходной задачи, то есть $F(y) = 400$. Установим соотношение между исходными и искусственными переменными. Для исходной задачи изначально присутствовали переменные x_1, x_2, x_3, а переменные x_4, x_5 и x_6 были введены искусственно при приведении задачи к каноническому виду. Поэтому они будут соответствовать исходным переменным y_1, y_2 и y_3 в двойственной задаче.

$$\begin{array}{ccc} x_4 & x_5 & x_6 \\ | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

В случае необходимости вычисления искусственных переменных для двойственной задачи (это может быть нужно, например, для оценки избытка ресурса) можно ввести и соотношение между другими переменными

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | \\ y_4 & y_5 & y_6 \end{array}$$

Значения переменных y смотрятся в нижней строке таблицы без знаков минус. Таким образом, $y_1 = 2/9$ (нижняя строка, столбец x_4), $y_2 = 5/3$ (нижняя строка, столбец x_5) $y_3 = 0$ (нижняя строка, столбец x_6).

Для закрепления материала можно использовать следующую задачу. Кондитерская фабрика выпускает два вида карамели: обычную и шоколадную. На производство одной тонны карамели, требуется 2 т сахара и 2 т патоки, а на производство одной шоколадной карамели соответственно 3 т сахара, 1 т патоки и 3 т какао. Фабрика обеспечена 19 т сахара, 13 т патоки и 15 т какао. Производство обычной карамели дает предприятию за 1 тонну 7 тыс. руб. прибыли, а шоколадной карамели – 5 тыс. руб. Составить план производства карамели, максимизирующий общую прибыль предприятия. Найти цены, по которым конкурирующая фирма может скупить наши ресурсы.

Необходимость изучения двойственных задач может быть связана и с техническими причинами. Если, например, в прямой задаче было 10 ограничений и 2 переменных, то легко видеть, что в двойственной задаче будет 10 переменных и два ограничения. Поэтому, при применении симплекс-метода для решения исходной задачи нужно будет преобразовывать 10 строк, выбирая для каждой подходящие множители, то для двойственной задачи строк будет значительно меньше и применение симплекс-метода к ней будет гораздо проще. Кроме того, двойственные задачи удобно применять к ситуациям, когда исходная система ограничений содержит неравенства все знаки в которых «больше либо равно», а свободные члены неотрицательны. Тогда, при переходе к каноническому виду эти свободные члены необходимо переносить в другую часть неравенств и они становятся отрицательными, что недопустимо для применения симплекс-метода. Поэтому необходимо переходить к новому базису, что является достаточно трудоемкой процедурой. В то же время переход к двойственной задаче позволяет избежать указанной проблемы. Для демонстрации этого можно рассмотреть следующий пример.

Из 4 видов продукта требуется составить питательную смесь наименьшей стоимости, содержащую не менее 26 г белка, не менее 30 г углеводов и не менее 24 г витаминов. Количество полезных веществ в 1 кг продукта каждого вида указано в таблице. В ней же приведены цены за 1 кг сырья каждого продукта.

Вид сырья	Количество полезных вещества в 1 кг продукта			
	1	2	3	4
A	1	1	-	4
B	2	-	3	5
C	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья (у.е)	5	6	7	4

[1, № 1.115, с. 114].

Решение. Для определения оптимального плана производства продукции следует найти решение задачи, состоящее в определении минимального значения функции

$$F(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 \geq 26 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 \geq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geq 24 \\ x_j \geq 0 \; j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Решать такую задачу симплекс-методом очень неудобно, т.к. при переходе к канонической форме все свободные члены становятся отрицательными и возникает необходимость применения длительной процедуры выведения их из базиса, которая сложна не только для школьников, но и для студентов. Вместо этого можно воспользоваться двойственной задачей

$F(y) = 26y_1 + 30y_2 + 24y_3 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \le 5 \\ y_1 + 2y_3 \le 6 \\ 3y_2 + 4y_3 \le 7 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \le 4 \\ y_i \ge 0 \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Приведем ее к каноническому виду

F(y) = - G(y)

G(y) = 0 – $(26y_1 + 30y_2 + 24y_3) \to \min$

$$\begin{cases} y_4 = 5 - (\, y_1 + 2y_2 + y_3) \\ y_5 = 6 - (y_1 + 2y_{3)} \\ y_6 = 7 - (3y_2 + 4y_3) \\ y_7 = 4 - (4y_1 + 5y_2 + 6y_3) \end{cases}$$

Как видим здесь все свободные члены сразу становятся положительными.

	Св. член	↓ y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
y_4	5	1	2	1	1	0	0	0
y_5	6	1	0	2	0	1	0	0
y_6	7	0	3	4	0	0	1	0
→ y_7	4	4	5	6	0	0	0	1
G(y)	0	26	30	24	0	0	0	0

	Св. член	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
y_4	4	0	-1/4	-1/2	1	0	0	-1/4
y_5	5	0	-5/4	1/2	0	1	0	-1/4
y_6	7	0	3	4	0	0	1	0
y_1	1	1	5/4	3/2	0	0	0	¼

G(y)	-26	0	-5/2	-15	0	0	0	-13/2

Значение целевой функции F(x) = 26. Установим соответствие неизвестных прямой и двойственной задач линейного программирования.

$$\begin{array}{cccc} y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

Из последней таблицы определяем $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 13/2 = 6{,}5$.

Существенно необходимыми являются двойственные задачи и для решения задач теории игр, которую также можно рассматривать в качестве материалов для внеурочной деятельности со школьникам, о чем более подробную информацию можно найти в работах [2, 3].

Список использованных источников

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – СПб.: Лань, 2009. – 352 с.
2. Глухова Н.В. Теория принятия решений: учебное пособие. / Глухова Н.В. – Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 48 с.
3. Егунова А.П. Задачи экономического содержания при изучении темы «Матричные игры». // Физико-математическое образование: школа – вуз: Материалы VI Региональной научно-практической конференции. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – С. 19-23.
4. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. – М.: Высшая школа, 1967. – 427с
5. Кузнецов А. В., Высшая математика. Математическое программирование, 2010. – 351с.
6. Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. – М.: Просвещение, 1966. – 183 с.
7. Янченкова Е.А. Возможности применения темы «Решение двойственных задач линейного программирования» в качестве

элективного курса по математике для школьников старших классов// Материалы VI Региональной научно-практической конференции. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – С. 63 – 66

8. Двойственная задача линейного программирования. Решение задач по математике онлайн [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://matesha.ru/book/lp6.php, дата обращения 24.03.2020.