**Физико-математические науки**

УДК 519:85

ББК 22:18

# Коалиционные игры: возможности применения в рамках вузовских курсов для экономистов, управленцев и математиков

**Егунова Анастасия Павловна,**

магистрант 2 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Методология математического образования». ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

**Глухова Наталья Владимировна,**

кандидат биологических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

**Аннотация.** В работе рассмотрены некоторые возможные подходы к рассмотрению практически-ориентированных коалиционных игр в вузовских курсах. Приведены конкретные примеры экономических ситуаций принятия решений, в которых могут быть использованы методы теории игр, и представлены решения рассматриваемых задач. Обосновывается полезность и возможность рассмотрения такого рода задач со студентами.

**Ключевые слова:** теория игр, коалиционные, кооперативные игры, оптимальные дележи, теория принятия решений.

# Coalition Games: Possibilities of application in the framework of university courses for economists, managers and mathematicians

**Egunova Anastasia P.,**

2nd year undergraduate of the Faculty of Physical, Mathematical and Technological Education, profile "Methodology of Mathematical Education". FSBEI of HE “Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

**Glukhova Natalya V.,**

Candidate of Biological Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

**Annotation.** The paper considers some possible approaches to considering practical-oriented coalition games in university courses. Concrete examples of economic decision-making situations in which game theory methods can be used are presented, and solutions to the problems under consideration are presented. The usefulness and the possibility of considering such problems with students is substantiated.

**Key words:** game theory, coalition, cooperative games, optimal divisions, decision theory.

Раздел «Теория игр» изучается в рамках математических и экономических дисциплин профессиональных образовательных программ, направленных на подготовку экономистов, специалистов в сфере управления, программистов и математиков. Для экономистов [9] и менеджеров [12] данный раздел носит практически-ориентированный характер – он направлен на обеспечение обучающихся конкретным математическим инструментарием для принятия наиболее удачных решений в ситуациях с конфликтом интересов. Для математиков и программистов данный раздел представляет интерес с точки зрения демонстрации возможной сферы применения изучаемого математического аппарата. Полезным является этот курс и для подготовки учителей математики в связи с современным требованием профилизации математического образования [4, 10, 11]. Поэтому объем изучения данного раздела может быть различным и зависит как от количества отводимых на него часов, так и от конкретных задач обучения данного профиля.

Чаще всего программы обучения на уровне бакалавриата ограничиваются только матричными играми. Большинство вузовских программ включают в себя детальное рассмотрение методов решения матричных игр в смешанных стратегиях. Наиболее распространенным методом является симплекс-метод, который достаточно удобен для компьютерной реализации, поэтому данный метод решения можно рассмотреть в этом случае как наиболее удобный. Решение матричных игр размерности $m \times n$ сводится к решению задачи линейного программирования. Игры, в которых участвует более двух игроков, часто вообще не рассматриваются, либо упоминаются только на уровне классификации [2, 3]. Однако возможно составить и достаточно несложные задачи, не изобилующие сложными математическими терминами, которые можно использовать в практической работе для иллюстрации идей теории кооперативных и коалиционных игр.

Игры большего числа лиц, чем два, могут быть как коалиционными (кооперативными), так и бескоалиционными. Анализ таких игр является значительно более сложным, так как кроме выбора оптимальной стратегии для конкретного игрока, необходимо еще и учесть возможность того, что он может вступить в коалицию (объединение) с другими игроками, причем заранее не фиксировано, с какими именно. Возможны ситуации, в которых один игрок, договариваясь с другим игроком о создании коалиции, затем фактически нарушает принятые договоренности, вступая в коалицию с другими участниками, если от них поступит более выгодное предложение, поэтому при анализе таких игр необходимо учитывать возможности такого «предательства», и проверять, есть ли у нашего потенциального «союзника» возможности найти более выгодные варианты. Наличие таких вариантов и степень их выгодности (под выгодностью мы понимаем числовую характеристику, показывающую, на сколько другая коалиция может стать более выгодной, чем наша) необходимо учитывать при расчете побочных платежей, то есть тех сумм, которые мы должны будем выплатить другому игроку дополнительно в случае, если он выполнит свои обязательства.

Отметим, что коалиции возможны и в случае игры двух лиц, если это не антагонистические игры. Рассмотрим следующий пример.

Две небольшие фирмы выпускают одинаковую продукцию, продающуюся на одном и том же рынке сбыта. Каждая фирма может использовать одну из двух стратегий: либо расширять свое производство (Р), либо не расширять (Н). В случае, если обе фирмы воспользуются стратегией расширения, то произойдет перепроизводство их продукции, и обе фирмы будут иметь убытки в размере – 8 у.е. Если одно из предприятий расширится, то оно получит прибыль 6 у.е., а другое лишь покроет свои издержки. В исходной ситуации обе фирмы получали прибыль 1 у.е.

Данную ситуацию можно представить как биматричную игру.

| | Н | Р |
|---|---|---|
| Н | (1, 1) | (0, 6) |
| Р | (6, 0) | (–8, –8) |

Видно, что если оба игрока договорятся между собой так, что один из них расширится, а другой не будет расширяться, то их суммарная прибыль составит 6 у.е., что на много больше, чем их суммарная прибыль в настоящий момент (2 у.е.), и тем более лучше, чем если они совместно одновременно расширятся и потерпят существенные убытки. Однако игрок, который не будет расширяться потерпит от этого убытки (потеряет прибыль в 1 у.е.), поэтому другой игрок должен будет обеспечить ему компенсацию этой прибыли (например, поделить прибыль 6 у.е. пополам, так как в данной ситуации положения игроков равные и не один не имеет преимущества перед другим). Поэтому в данной ситуации может существовать коалиция выгодная и тому, и другому игроку, а отступать от достигнутой договоренности им будет не выгодно (если будет достигнута договоренность, что расширяется первый игрок, то если второй игрок в одностороннем порядке нарушит свою договоренность, то он потерпит убытки 8 у.е., вместо прибыли в 3 у.е.; также если договоренность нарушит первый игрок, то второй игрок получит прибыль 1 у.е. вместо 0 у.е., как было бы если бы первый игрок расширился, а второй нет, также и первый игрок существенно потеряет в своей прибыли, то есть получит 1 у.е. вместо 3 у.е.).

Будем говорить, что имеет место равновесие в смысле Нэша, если для всех игроков при выборе стратегий, соответствующих равновесной ситуации, результат будет лучше, чем при выборе ими других стратегий.

Если участники коалиции договорились придерживаться равновесной ситуации, то эта ситуация действительно будет устойчивой, причем не в результате каких-либо административных санкций или этических норм, а только как результат интересов каждого конкретного игрока.

Так в приведенном выше примере ситуации (Н, Р) или (Р, Н) являются равновесными. Не всякая игра имеет равновесную ситуацию. Более того, если во всякой бескоалиционной игре равновесная ситуация является устойчивой, так как ни один из игроков не будет заинтересован в ее нарушении, то это не верно для коалиционных игр, так как коалиция может достичь большего результата, чем сумма результатов всех игроков, входящих в коалицию по отдельности. Данное свойство называется супераддитивностью [9, С. 248].

Ситуация равновесия по Нэшу сходна с понятием седловой точки в обычных матричных играх, но имеет и некоторые отличия. Например, в матричной игре результат в седловой точке совпадает с ценой игры и во всех седловых точках выигрыши игроков одинаковы, однако это не верно для биматричных игр. Кроме того, в матричной игре выбор стратегии, соответствующей седловой точке гарантирует игроку выигрыш, соответствующий цене игры даже при неправильном поведении другого игрока, а в биматричной игре это не верно.

При изучении данной темы полезно сообщить студентам теорему Нэша: всякая биматричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях. Доказательство этой теоремы не является сложным, однако приводить его имеет смысл только студентам-математикам, так как она основывается на применении теоремы Брауэра о неподвижной точке [9, С. 222], студентам-экономистам данное доказательство приводить нецелесообразно, так как оно не является конструктивным (доказывает существование решения, но не позволяет его найти).

Коалиция называется нетривиальной, если она содержит более одного игрока и отлична от коалиции всех игроков. В игре двух лиц могут существовать только тривиальные коалиции. В игре более двух лиц нетривиальные коалиции возможны (например, в игре трех лиц любые два игрока могут образовать нетривиальную коалицию, всего возможных нетривиальных коалиций 3: первый и второй игрок могут образовать коалицию против третьего, второй и третий – против первого, либо первый и третий против второго).

При анализе коалиционных игр в качестве основной меры оценки качества результата используется суммарный выигрыш коалиции в наихудшей для нее ситуации, то есть в ситуации, когда все остальные игроки составят коалицию против данной коалиции (такую игру уже можно рассматривать как игру двух игроков, если под игроком понимать коалицию, необходимо только рассмотреть все возможные типы коалиции в данной игре). Конкретные примеры определения выигрышей в коалициях для игры 3 игроков можно найти в работе [7, С. 196]. Эту работу хотелось бы отметить как одну из наиболее полных и доступных из современных учебных изданий.

Следующим наиболее важным вопросом в анализе кооперативных игр после вопроса о выборе наиболее удачной коалиции, является вопрос об оптимальном дележе выигрыша достигнутого коалицией [5].

Будем говорить, что игра имеет 0-1 редуцированную форму, если выигрыш отдельных игроков, не вступивших в коалицию равен 0, а суммарный выигрыш всех игроков, вступивших в коалицию равен 1 (составляет 100%) [9].

Пример конкретной коалиционной игры с дележами можно найти в работе [8]. Здесь рассматривается война трех государств за источники ресурсов, однако в ней остается необъясненным то, каким образом подсчитываются выигрыши игроков в различных ситуациях, они просто фигурируют как условия задачи. Однако интересно было бы проследить, как именно формируются результаты в конкретной ситуации. Такой пример нам удалось получить на основании работы [9] с небольшими изменениями.

Пусть три фирмы вовлечены в выпуск некоторого продукта, состоящего из двух частей, причем первые две фирмы могут производить первую часть, а третья – вторую. Первая фирма может поучаствовать в выпуске 900 единиц данного продукта, вторая – 600 единиц, третья – 1000 единиц. Ясно, что прибыль ни одна фирма не может получить, если будет работать независимо от других (ни одна фирма не может получить прибыль только за часть продукта, продукт продается целиком). Фирмам 1 и 2 нет смысла вступать в коалицию против третьего игрока, так как без второй части они ничего продать не могут. Поэтому в данной игре возможны только три коалиции с ненулевым результатом:

Фирма 1 + фирма 3 (Ф1 + Ф3) могут совместно выпустить 900 единиц продукта);

Фирма 2 + фирма 3 (Ф2+ Ф3) – 600 единиц;

Все три фирмы вместе (Ф1 + Ф2 + Ф3) – 1000 единиц.

Прибыль фирм определяется количеством выпущенных продуктов. Если принять суммарную прибыль от продажи всех 1000 единиц за 1, то игра будет иметь 0-1 редуцированную форму.

Очевидно, что третья коалиция более выгодна всем участникам, так как дает наилучший суммарный результат. Возникает вопрос о том, как следует правильно поделить полученную прибыль между участниками.

Вычислим «относительные результативности» других коалиций, то есть каков будет процент от максимально возможной прибыли, если игроки вступят в другие коалиции, отличные от коалиций всех игроков.

Для коалиции Ф1 + Ф3 результативность равна 900/1000 = 0,9;

Для коалиции Ф2 + Ф3 – 600/1000 = 0,6;

Для коалиции Ф1 + Ф2 + Ф3 результативность составит 1.

Дележ будет справедливым, если для всех возможных коалиций отличных от коалиций всех игроков суммарный относительный результат этих коалиций будет не лучше, чем результат этих же игроков в составе общей коалиции. Действительно, если это будет не так, то этим игрокам будет выгоднее выйти из состава общей коалиции и получить свой наилучший результат, не обращая внимания на то, что общий результат остальных игроков станет хуже. Так в нашем примере дележ, в котором первому игроку достанется 30 % выигрыша, второму – 25 % и третьему – 45 % не будет справедливым, так как в этом случае игроки 1 и 3 получают только 75 % от всей максимально возможной прибыли, в то время как коалиция Ф1 + Ф3 могла бы получить 90 % от максимально возможной прибыли. Поэтому, если игрок 2 захочет иметь более 10 % от всей прибыли коалиции трех игроков, то игрокам 1 и 3 будет выгодно создать отдельную коалицию без участия этого игрока.

Аналогично, если игроку 1 потребовать прибыль большую, чем 40 %, то игрокам 2 и 3 останется менее 60 %, что позволит им создать коалицию против 1 игрока. Отсюда дележ будет справедливым, если фирма 1 получит не более 40 % прибыли, фирма 2 – не более 10 % прибыли, а фирма 3 – все остальное. Такого результата можно достичь, если первая фирма будет участвовать в изготовлении 800 единиц продукта, фирма 2 – 200 единиц продукта, а фирма 3 будет выполнять вторую часть работы необходимую для выпуска этих продуктов. Если работы соизмеримы, то будет справедливо, если фирма 3 получит половину всей прибыли, так как она участвовала в половине изготовления всех продуктов, а первая и вторая фирма поделят прибыль в отношении 4:1, то есть получат 40 % и 10 % от общей прибыли соответственно. При другом соотношении выполняемых работ возможны и другие справедливые дележи прибыли.

В общем виде, если за $c_i$ обозначить относительную прибыль i-й коалиции, а за $x_j$ – долю игрока в составе общей коалиции, то требование справедливости будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{k} x_k \geq c_i$$

где k – количество участников в i-й коалиции, а в левой части суммируются результаты участников данной коалиции. Например, для игры трех игроков нетривиальными будут только коалиции из двух игроков. Обозначив результат коалиции игроков 1 и 2 за $c_3$, игроков 1 и 3 за $c_2$ и игроков 2 и 3 за $c_1$, придем к следующей системе неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq c_3 \\ x_1 + x_3 \geq c_2 \\ x_2 + x_3 \geq c_1 \end{cases}$$

Так как суммарный выигрыш всех трех игроков $x_1 + x_2 + x_3 = 1$,

$$x_1 = 1 - (x_2 + x_3)$$

$$x_1 \leq 1- c_1$$

$$x_2 \leq 1- c_2$$

$x_3 \leq 1- c_3$.

Данные условия можно удобно использовать для определения оптимального дележа. В заключение хотелось бы отметить, что тематика коалиционных игр является достаточно интересным разделом, который желательно включать в программу подготовки специалистов отмеченных выше профилей при наличии достаточного количества часов. При недостатке часов изучение данного раздела целесообразно проводить в формате проектной деятельности, обучение которой в настоящее время приобретает все большую значимость [1, 6].

**Список использованных источников**


1. Владова Е.В. О некоторых аспектах математического образования // Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике в условиях стандартизации образования. Материалы Всерос. науч.-практ. конф. препод. мат., информ. школ и вузов. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – С. 126 – 128.
2. Гельруд Я.Д. Теория игр: Учебное пособие. – Челябинск: Изд. ЧелГУ, 2012. – 348 с.
3. Глухова Н.В. Теория принятия решений: учебное пособие. / Глухова Н.В. – Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 48 с.
4. Егунова А.П. Задачи экономического содержания при изучении темы «Матричные игры». // Физико-математическое образование: школа – вуз: Материалы VI Региональной научно-практической конференции. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – С. 19-23.
5. Кооперативные игры. Учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей / Б.И. Смагин. Мичуринск – наукоград РФ, 2008. – 28 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа http://producm.ru/upload/books/books13/31.pdf (дата обращения 19.03.2020)
6. Куренева Т.Н. Метод проектов и информационно-коммуникационные технологии // Информационные технологии в образовании Материалы Международной научно-практической конференции. Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова. 2011. С. 96-98.
7. Писарук, Н. Н. Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. — Минск : БГУ, 2019. — 283 с. https://pisaruk-9591.appspot.com/static/books/games.pdf
8. Теория игр для экономистов [Электронны ресурс]. Режим доступа: http://student-lab.ru/book-pages/122-31-ponyatie-koalicionnoy-igry-kniga-teoriya-igr-dlya-ekonomistov.html (дата обращения 19.03.2020)
9. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. – М.: Высшая школа, 2002. – 288 с.

10. Столярова И.В., Фолиадова Е.В., Штраус В.А. Профильное обучение математике: учебно-методическое пособие для магистрантов направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование. Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 20 с.
11. Столярова И.В., Фолиадова Е.В., Штраус В.А. Современные проблемы математического образования: учебно-методическое пособие для магистрантов направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование. Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 22 с.
12. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – М.: Дело. – 2004. – 440 с.