Физико-математические науки

УДК 514 + 377.8

ББК 22.151 + 74.26

Методы варьирования условий олимпиадных заданий: задачи по геометрии

Глухова Наталья Владимировна,

Кандидат биологических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Глухов Владимир Петрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, ФГБОУ ВО «Ульяновский институт гражданской авиации им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева», Ульяновск, Россия

Борисова Татьяна Сергеевна,

студент 5 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Математика. Иностранный язык» ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Аннотация. В работе рассмотрены примеры составления новых олимпиадных задач по геометрии на основании изменения текстов. Показано как можно изменить условия задачи путем включения объектов с известными свойствами в другие геометрические фигуры. Описанные методы полезны для подготовки студентов к работе с одаренными детьми.

Ключевые слова. Олимпиадная математика, качество подготовки учителей математики, планиметрия, свойства треугольников, отношение углов и дуг окружностей.

Methods for varying the conditions of the olympiad tasks: problems in geometry

Glukhova Natalya Vl.,

Candidate of Biological Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

Glukhov Vladimir P.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Natural Sciences, Ulyanovsk Institute of Civil Aviation named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev, Ulyanovsk, Russia

Borisova Tatyana S.,

5th year student of the Faculty of Physical, Mathematical and Technological Education, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

Annotation. The paper considers examples of compiling new olympiad problems in geometry based on changing texts. It is shown how the conditions of the problem can be changed by including objects with known properties in other geometric shapes. The methods described are useful for preparing students for work with gifted children.

Keywords. Olympiad mathematics, the quality of training teachers of mathematics, planimetry, the properties of triangles, the ratio of angles and arcs of circles.

В настоящее время существенно возрастает роль математических олимпиад в обучении школьников: они могут служить познавательно-стимулирующим средством развития мышления и обучения умению решать задачи не по штампам [4, с. 126 - 127], используются как метод популяризации математических знаний [18, с. 5], и даже как средство формирования экономической грамотности [9, с. 108 – 115]. Некоторые олимпиадные задачи по математике позволяют показать «контуры важных математических понятий и конструкций, показать, что обобщение сравнительно несложных задач иногда выводит на передний край математики» [3, с. 3]. Много говорится и о важности качественной подготовки учителя к работе с одаренными детьми, а также о новых трудностях и вызовах, связанных с тем, что теперь достаточно легко можно найти готовые решения олимпиадных задач с помощью современных технических средств [2, с. 125], [17, с. 83]. В ряде случаев очень сложно оградить обучаемых от применения электронных ресурсов во время проведения контрольных мероприятий и соревнований, которые часто проводятся в формате интернет-тестирования [6, с. 217], [8, с. 178 – 179], [10, с. 16 – 17]. Даже при проведении ЕГЭ не всегда удается оградить детей от получения готовых решений из интернета [13, с. 115], вследствие чего результаты ЕГЭ по сравнению с данными входного контроля и первой экзаменационной сессии оказываются несколько завышенными [7, с. 73], [12, с. 266]. Тем более это сложно сделать при проведении олимпиад в традиционной или заочной формах. В связи с этим особенно остро проявляется необходимость формирования у учителя математики умения самостоятельно составлять новые олимпиадные задачи. Для качественной подготовки учителя к работе в современной школе необходимо «формирование методических умений и навыков будущих учителей математики по проектированию процесса обучения математике в условиях профильной и предпрофильной подготовки», [21, с. 4], умение составлять рабочие программы математических кружков [22, с. 7], и здесь особое внимание должно быть уделено формированию умения самостоятельно составлять задачи [20, с. 7]. В предыдущих работах был рассмотрен вопрос о том, как составлять новые олимпиадные задачи на делимость [2] и логические олимпиадные задачи [19]. В настоящей работе обратимся к составлению олимпиадных задач по геометрии. В приведенных примерах использованы задания, составленные в процессе учебных занятий со студентами, некоторые из которых были использованы при проведении открытой региональной олимпиады для школьников, проводимой в Ульяновском государственном педагогическом университете.

Самостоятельное составление задач по геометрии является достаточно сложной деятельностью даже на основном школьном уровне. Новые задачи по геометрии, однако, могут быть составлены на базе других олимпиадных задач, либо не очень известных геометрических фактов. Например, факт, что медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы [1, с. 84] (и обратно, если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник – прямоугольный [1, с. 85]), изучается в курсе школьной геометрии, но чаще преподносится в виде задач, а не теорем (см. например, [5, с. 72 № 231; с. 113, № 404]), поэтому школьники не всегда об этом помнят. Можно составлять задачи, в которых используется отмеченное свойство, но при этом даже не употреблять слова «медиана», «прямой угол». Рассмотрим такие примеры.

«В треугольнике АВС проведена высота ВН. М – середина ВС, отрезок МН равен высоте. Чему равен угол С?» [11, с. 25, № 1.9.3].

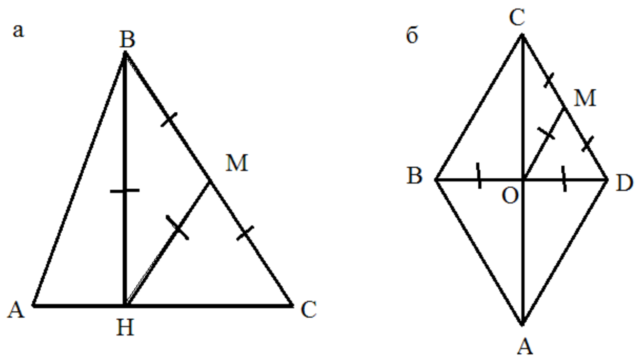

Рис. 1.

Решение: так как BH – высота, следовательно, угол H – прямой. HM – медиана в ΔBHC (см. рис. 1 а), следовательно, она как медиана, опущенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы, то есть BM = MC = MH (доказать этот факт можно, например, описав окружность около треугольника BCH, т.к. угол H – прямой, следовательно он опирается на диаметр, т.е. BC – диаметр, M – центр описанной окружности, а MH, HC и MB – радиусы). Тогда Δ BHM – равносторонний и все его углы равны 60º. Отсюда

$\angle C = 90^{o} - \angle HBC = 90^{o} - 60^{o} = 30^{o}$.

Можно видоизменить эту задачу, включив тот же самый треугольник в состав каких-то более сложных фигур.

«В ромбе ABCD середина CD обозначена буквой M, а пересечение AC и BD – буквой O. Известно, что MO = OB. Найдите все углы ромба» [11, с. 25, № 1.9.4]. Здесь, так как диагонали ромба перпендикулярны, OM является медианой, опущенной из вершины прямого угла (рис. 1 б). Кроме того, диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам, поэтому OB = OD и ΔDOM – равносторонний, как и в предыдущей задаче. Ответ: углы A и C равны 60°, а углы B и D – 120º.

Можно сделать эту задачу стереометрической.

«В правильной треугольной пирамиде SABC высота SH равна отрезку, соединяющему H и середину AS. Найти угол между плоскостью основания ABC и прямой SC» [11, с. 25, № 1.9.7].

Решение. В этой задаче прямоугольным треугольником с медианой является AHS, поэтому равносторонним треугольником будет MHS (рис. 2), откуда $\angle SAH = 30^{o}$.

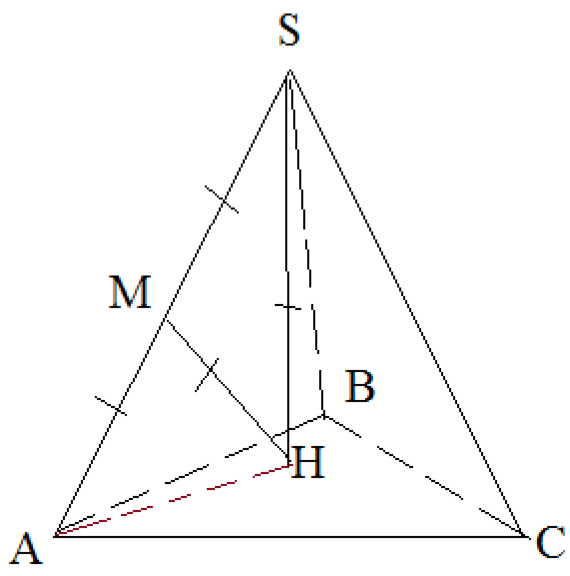

Рис. 2.

Так как пирамида правильная, угол между прямой SC и плоскостью основания будет такой же, как и угол между AS и плоскостью основания. AH – проекция AS на плоскость основания, поэтому искомый угол равен $\angle SAH = 30°$.

Теперь обратимся к более сложной ситуации. В работе [14, с. 31, № 9.3] приведена следующая олимпиадная задача «В треугольнике ABC стороны AB = 33, AC = 21, BC = n. Найти все натуральные значения n для каждого из которых существует натуральное число m, а также точка D на стороне AB и точка E на стороне AC, удовлетворяющие условию AD = DE = EC = m?»

Решение данной задачи приводится в указанном сборнике, поэтому мы не будем здесь его повторять. В качестве одного из методических приемов обучения студентов методам составления новых геометрических задач, можно предложить им изменить какие-либо условия задачи и получить новую задачу. В первую очередь возникает вопрос, а нельзя ли устранить из нее условие целочисленности (то есть не требовать, чтобы m и n были натуральными). На первый взгляд это должно бы привести к результатам, т.к. выписывая из треугольников теорему косинусов, мы получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Однако в процессе решения данной системы оказывается, что система вырожденная, и возможность построения такой конструкции не зависит от конкретных длин сторон в треугольнике. На основании данного результата можно сформулировать такую новую задачу на построение:

«В треугольнике ABC построить точку D на стороне AB и точку E на стороне AC, так чтобы AD = DE = EC»

Решение: предположим исходные точки построены (см. рис. 3), тогда ΔADE – равнобедренный (AD = DE) и углы при его основании равны.

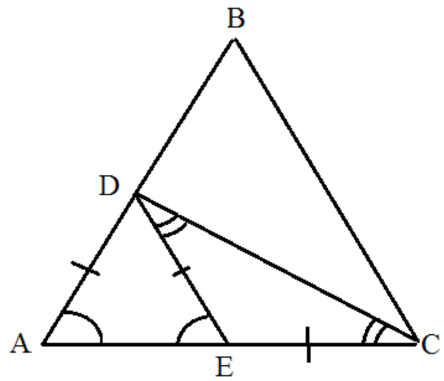

Рис. 3.

Проведем CD. ΔCED тоже равнобедренный, так как DE = EC, следовательно, $\angle EDC = \angle DCE$, обозначим их α. Тогда $\angle DEC = 180^o - 2\alpha$, откуда $\angle DEA=2\alpha$ как смежный с ним. $\angle DAE =\angle DEA = 2\alpha$, поэтому, если мы разделим угол A исходного треугольника пополам (стандартное геометрическое построение), а затем от стороны AC отложим полученный угол с вершиной в точке C, то пересечение его со стороной AB даст искомую точку D, далее лишь требуется отложить на AC отрезок CE, .равный AD.

Доказательство того, что построено требуемое решение, а также анализ решения позволяет сформулировать следующую задачу.

«В треугольнике ABC угол A в два раза больше, чем угол B. На луче BA отложена точка D так, что AC = BD. Чему равна длина отрезка CD, если длина AB равна 3?»

Решение. Случай а) точка D лежит внутри отрезка AB (рис. 4).

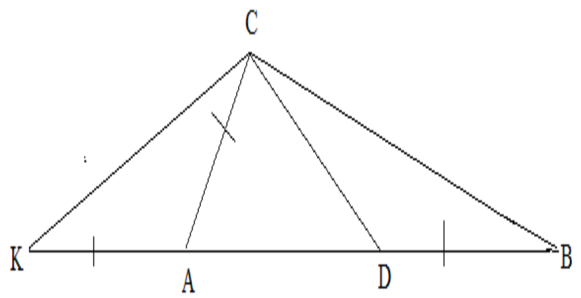

Рис. 4.

Пусть ∠CBA = α, тогда угол ∠CAB = 2α. Дополнительное построение – на луче BA отложим точку K, так что AK = BD = AC. Треугольник KAC равнобедренный, следовательно, ∠AKC = ∠ACK. Угол ∠CAD внешний для этого треугольника, а значит равен сумме углов ∠CKA + ∠ACK = 2α, откуда ∠CKA = α = ∠CBA. Таким образом, треугольник KCB – равнобедренный (углы при основании равны), откуда KC = BC.

ΔCKA = ΔCBD по двум сторонам и углу между ними, отсюда CA = CD = 3.

Случай б) точка D лежит вне треугольника на продолжении стороны BA.

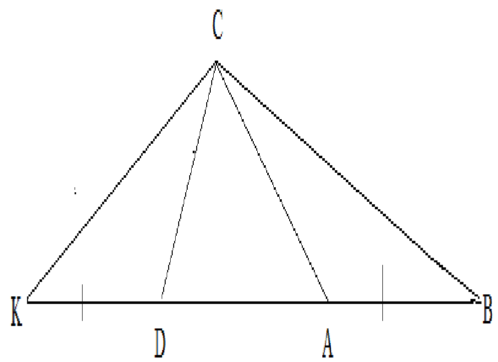

Рис. 5.

В этом случае на продолжении луча BD отложим отрезок DK = AB.

$$AC = BD = BA + AD = AD + DK = AK.$$

Тогда треугольник AKC равнобедренный. Далее решение аналогично случаю а (∠CKD = α = ∠CBA, треугольник KCB – равнобедренный, откуда KC = BC.

ΔCKD = ΔCBA по двум сторонам и углу между ними, отсюда CA = CD = 3.

Случай в) Точки A и D совпадают, тогда треугольника ABC равнобедренный, CA = CD = 3.

Ответ: 3.

Попробуем теперь еще более усложнить нашу задачу, «спрятав» соотношение углов в какие-то другие фигуры. Для 8 класса, например, это можно сделать, проведя биссектрису AL, и указав, что она равна отрезку BL (в результате полученный треугольник ALB будет равнобедренным, что будет означать равенство его углов при основании, то есть то, что угол A в исходном треугольнике в два раза больше угла B).

В старших классах можно добавить какие-то окружности и указать в них отношения между дугами, на которые опираются нужные нам углы. Например, задачу можно сформулировать так:

«Около треугольника ABC описана окружность. На сторонах AC и AB отложены точки D и E, соответственно, так что AD = BE = 3. Прямая BD пересекает окружность в точке К. При этом длина дуги AК в два раза меньше длины дуги BC. Найдите длину DE».

Также можно вернуться к идее с проведением биссектрисы, только построение этой биссектрисы можно «замаскировать» построением вписанной окружности, центр которой, как известно, является точкой пересечения биссектрис [5, с. 182]. В этом случае можно предложить следующую формулировку задачи.

«В ∆ABC вписана окружность с центром O. AO пересекает сторону BC в точке D, при этом AD = DB. На стороне AB отложена точка K такая, что BK = AC = 5 см. Найдите CK».

Как видим, здесь мы поменяли не только способ задания отношения между углами, но и сместили буквенные обозначения, а также изменили числовое значение. Это также рекомендуется делать при составлении аналогов задач, так как затрудняет поиск их решений в интернете.

Вместо одной окружности можно использовать две окружности равного радиуса. Это позволит избежать не только явного указания на соотношение между углами, но и устранить фразу о равенстве отрезков, откладываемых на сторонах.

«В треугольнике ABC сторона AB = 6. Окружность с центром в точке А и радиусом AB пересекает сторону AC в точке K, а окружность того же радиуса с центром в точке С пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC в точке E. Длина дуги BK в два раза больше длины дуги DE. Найдите длину BD.

Для того чтобы сделать соотношение между углами еще менее заметным, можно воспользоваться, например, тем фактом, что центральный угол, опирающийся на определенную дугу, в два раза больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу (как раз это соотношение и требуется в нашей задаче).

«Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O, причем AB является диаметром данной окружности. CO пересекает окружность в точке K. От точки C на окружности отложена дуга CB_1 равная дуге BC. B_1K пересекает сторону AB в точке E. Отрезок OE = 1 см. На отрезке KC отложен отрезок KD, так что его длина равна OE. Найдите длину DE».

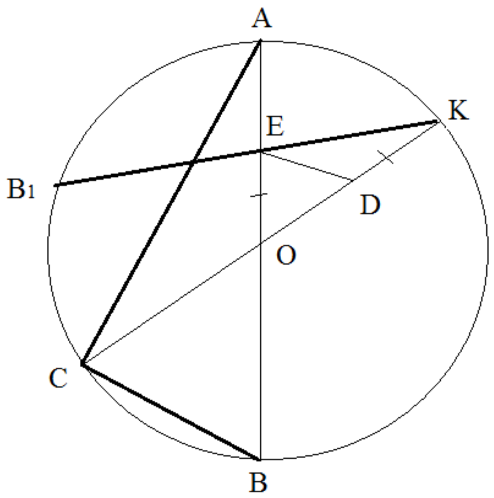

Рис. 6.

В данном случае легко видеть (рис. 6), что $\angle B_1KC = \angle CAB$ (опираются на равные дуги). Заметим, что $\angle COB$ в два раза больше, чем $\angle B_1KC$ и $\angle CAB$, т.к. он является центральным углом, опирающимся на дугу CB. Кроме того, можно видеть, что $\angle COB = \angle AOK$, так как они вертикальные, поэтому треугольник OEK в этой конструкции является тем треугольником из предыдущих задач, у которого один угол в два раза больше другого, на соответствующих сторонах которого отложены равные отрезки. Отметим, что в данной ситуации уже нет необходимости рассматривать три случая в решении, так точка D заведомо оказывается внутри треугольника, т.к. отрезок OE очевидно меньше, чем радиус. Так что в этом смысле задача становится несколько легче, чем исходная, в которой необходимо рассматривать три случая. В то же время из-за обилия деталей на чертеже возможность увидеть необходимое дополнительное построение в этой ситуации снижается, поэтому данную задачу можно отнести к очень высокому уровню сложности и применять ее следует не на отборочных турах, а, возможно, на олимпиадах регионального уровня, на которые приходят уже отобранные школьники, победители предыдущих этапов.

Чертеж рис. 6 позволяет сформулировать еще несколько вариаций этой задачи.

«Около треугольника ABC, угол A которого равен 20^o описана окружность с центром в точке O, причем AB является диаметром данной окружности. CO пересекает окружность в точке K. От точки C на окружности отложена дуга CB_1 равная дуге BC. B_1K пересекает сторону AB в точке E. На отрезке KC отложен отрезок KD, так что его длина равна OE. Найдите $\angle KED$».

Решение. $\angle COB = \angle AOK = 40^o$ (как центральный, в два раза больший, чем вписанный, опирающийся на ту же дугу). $\angle B_1AK = \angle\ CAB = 20^o$ (опираются на равные дуги). Далее, как и в предыдущих задачах, доказываем, что KD = DE = OE, поэтому ΔKDE равнобедренный и его углы при основании равны, поэтому искомый угол равен 20^o. Разумеется, в качестве A можно взять и какой-то другой угол меньший 45^o (в противном случае дуга CB становится больше, чем четверть окружности и KB_1 перестает пересекать AB, что тоже можно использовать со школьниками как материал для организации математических исследовательских проектов [15, с. 51 – 54], [16, с. 161 – 164], [20, с. 7]).

Далее, так как AB – диаметр окружности, угол C в треугольнике ABC – прямой, а $\angle ABC = 70^0$. Поэтому в задаче вместо угла A можно задать значение угла B (70°). Дальнейшее решение дословно повторяет описанное выше.

Таким образом, можно отметить, что формирование новых олимпиадных заданий по геометрии может быть относительно легко достигнуто путем включения фигур с известными отношениями в состав других математических фигур. Разумеется, описанный способ не является единственно возможным. Другим интересным направлением в составлении новых геометрических задач является включение в них прикладных аспектов из других областей, например, физики [17, с. 155 – 157], [11, с. 41 – 42] или методов оптимизации [11, с. 26 – 32].

Список использованных источников

1. Атанасян Л.С., Денисова Н.С., Силаев Е.В. Курс элементарной геометрии. Часть 1. Планиметрия. – М.: Сантакс-Пресс, 1996. – 304 с.
2. Бабкина О.П., Трухачева Е.С., Глухова Н.В. Применимость понятий высшей алгебры к олимпиадным задачам: задачи на делимость. // НАУКА ONLINE Электронный журнал URL: Электрон. журн. — *2018*. — №5 (4). — Режим доступа: http://journal-no.ulspu.ru. – С. 124 – 133.
3. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986. – 176 с.
4. Владова Е.В. О некоторых аспектах математического образования // Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике в условиях стандартизации образования. Материалы Всерос. науч.-практ. конф. препод. мат., информ. школ и вузов. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – С. 126 – 128.
5. Геометрия 7 – 9 классы / Л.С. Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Э.Г.Позняк, И.И. Юдина. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

6. Глухов В.П., Громова Н.Ю. Индивидуальные домашние задания как средство повышения качества образования. Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании Международная научно-техническая конференция (Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.) Сборник научных трудов. Часть 1. Ульяновск, УлГТУ. с. 138 – 144. С. 216 – 218.
7. Глухов В.П., Никонова С.П. Сравнительный анализ результатов ЕГЭ и первой сессии //Проблемы современного математического образования в высшей школе. Материалы международной заочной научной конференции. 2013. С. 72-73.
8. Глухова Н.В. Возможные формы контроля при дистанционном обучении дисциплине «Математическое моделирование биологических процессов» // Электронное обучение в непрерывном образовании. – 2016. № 1 (3). С. 178-183.
9. Глухова Н.В. Олимпиадные задачи по математике как средство формирования экономической грамотности школьников // Поволжский педагогический поиск. – 2018. - № 3 (25). С. 108 - 115.
10. Глухова Н.В. К вопросу о применении тестирования по математике у студентов, обучающихся по направлению подготовки «управление персоналом», в рамках компетентностного подхода // Поволжский педагогический поиск. – 2015. - № 1 (11). – С. 16 – 20.
11. Глухова Н.В., Фолиадова Е.В. Олимпиадные и исследовательские задачи в общем и профессиональном математическом образовании: учебное пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля – Ульяновск: УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2018 – 66 с.
12. Громова Н.Ю., Глухов В.П. Анализ качества знаний пилотов-первокурсников по физике // Физика в системе современного образования (ФССО-15) материалы XIII Международной конференции. 2015. С. 263-266.

13. Громова Н.Ю., Глухов В.П. Анализ качества знаний пилотов-первокурсников по физике // Физическое образование в вузах. – 2015. – Т.21. – № 4. – С. 114 – 118.

14. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. Под ред. И.Н. Сергеева. – М.: Наука, 1987. – 416 с.

15. Куренева Т.Н. Диверсификация образования и проблема подготовки учителей // Образование и саморазвитие. 2011. Т. 6. № 28. С. 51-55.

16. Куренева Т.Н. Обучение будущих учителей организации проектной деятельности школьников// Сибирский педагогический журнал. 2015. № 2. С. 161-165.

17. Куренева Т.Н., Семенов А.А. Применение скалярного и векторного произведения векторов к решению физических задач // Проблемы современного математического образования в высшей школе Материалы международной заочной научной конференции. 2013. С. 154-158.

18. Макеева О.В., Фолиадова Е.В. Методика популяризации математических знаний: методические рекомендации для магистрантов направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование. Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 20 с.

19. Малкова О.А., Борисова Е.О., Глухова Н.В. Формирование новых олимпиадных задач путем варьирования условий: логические задачи и комбинаторика. // НАУКА ONLINE Электронный журнал URL: Электрон. журн. — 2019. — №6 (1). — Режим доступа: http://journal-no.ulspu.ru. – С. 82 – 94

20. Столярова И.В., Фолиадова Е.В. Штраус В.А. Математическая деятельность и ее формирование: учебно-методическое пособие для магистрантов направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование.– Ульяновск.УлГПУ им. И.Н. Ульянова. 2018.–26 с.

21. Столярова И.В., Фолиадова Е.В., Штраус В.А. Профильное обучение математике: учебно-методическое пособие для магистрантов направления

подготовки 44.04.01 Педагогическое образование. Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 20 с.

22. Столярова И.В., Фолиадова Е.В., Штраус В.А. Современные проблемы математического образования: учебно-методическое пособие для магистрантов направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование. Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 22 с.