УДК 517.984.5

ББК 22.162

Спектральный анализ некоторых интегральных операторов в банаховом пространстве

Коннов Евгений Юрьевич,

аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», г. Ульяновск, Россия

Скворцова Ольга Петровна,

аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», г. Ульяновск, Россия

Научный руководитель: Штраус Владимир Абрамович,

доктор физико – математических наук, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова», г. Ульяновск, Россия

Аннотация. В работе реализовано прямое построение резольвенты и исследование спектра оператора, заданного в пространстве суммируемых функций одной переменной посредством повторного интеграла с переменными пределами интегрирования. Указывается на целесообразность рассмотрения подобных задач при изучении основ функционального анализа в рамках магистерских программ и программ аспирантуры как введения в общие вопросы спектральной теории линейных операторов.

Ключевые слова: интегральный оператор, резольвента линейного оператора, дискретный спектр, непрерывный спектр, остаточный спектр.

Основы спектральной теории линейных операторов как в гильбертовых, так и в банаховых пространствах заложены ещё в трудах основателей функционального анализа и в настоящее время достаточно подробно излагаются в монографиях и учебной литературе, см., например, классические работы [1], [2] и более современное изложение на языке спектров алгебр в [3]. Однако эти общие конструкции ещё не дают достаточного представления о спектрах конкретных операторов, в том числе тех, которые встречаются в различных приложениях теории. Мы полагаем, что для начинающего математика полезно изучать общие положения теории на частных примерах, которые создают мотивировки для введения абстрактных понятий и проясняют формулировки результатов. Указанный подход реализован в данной работе; известные определения систематизированы здесь с целью привлечь внимание к вопросам, возникающим при их применении к конкретным классам задач.

В указанных выше приложениях типичной задачей является решение однородного уравнения

$$Ax = \lambda x, \qquad \text{т. е.} \quad (A - \lambda E)x = 0 \tag{1}$$

и/или неоднородного уравнения

$$Ax = \lambda x + y, \qquad \text{т. е.} \quad (A - \lambda E)x = y \tag{2}$$

где A – линейный оператор, действующий в (гильбертовом или банаховом) пространстве $\mathfrak{H}$, E – тождественный оператор в $\mathfrak{H}$, $x \in \mathfrak{H}$ - искомый элемент, $y \in \mathfrak{H}$ в соотношении (2) – заданный элемент, λ —неизвестный заранее числовой параметр (вообще говоря, комплексное число). Напомним основные понятия спектральной теории операторов, связанные с уравнениями (1) и (2). Если однородное уравнение (1) при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет решения, отличные от нулевого элемента, то число λ называется *собственным значением* оператора A. Такие решения называются *собственными элементами* (или собственными векторами) оператора A, соответствующими указанному собственному значению. Очевидно, в силу линейности самого оператора A

множество собственных элементов, соответствующих одному и тому же собственному значению, дополненное нулевым элементом, который удовлетворяет уравнению (1) при любом λ, представляет собой подпространство векторного пространства $\mathfrak{H}$. Если оператор A ограничен, т.е. имеет конечную норму

$$A = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

(или, что для линейных операторов то же самое, непрерывен: из условия $x_n \to 0,\ x_n \in D(A)$ следует $Ax_n \to 0$), то это множество – ядро оператора $A - \lambda E$ – является, очевидно, замкнутым в нормированном пространстве $\mathfrak{H}$. Оно называется *собственным подпространством* оператора A, отвечающим собственному значению λ.

В случае конечномерного пространства $\mathfrak{H}$, как известно, любой действующий в нём линейный оператор ограничен. Его собственные значения могут быть найдены в этом случае как корни характеристического уравнения, построенного по его матрице в каком-либо фиксированном базисе пространства:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

т.е. как корни алгебраического уравнения степени $n = \dim \mathfrak{H}$. Значит, количество собственных значений оператора (с учётом кратности) равно в этом случае размерности пространства $\mathfrak{H}$. Для остальных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $A - \lambda E$ имеет тривиальное ядро и, следовательно, обратим; обратный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ определён на всём пространстве $\mathfrak{H}$ (как сам оператор $A - \lambda E$, так и обратный к нему являются в этом случае линейными автоморфизмами пространства $\mathfrak{H}$, так что размерность образа $\mathrm{Ran}(A - \lambda E)$ равна размерности пространства) и, разумеется, ограничен. Итак, для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме нескольких (собственных) значений, существует всюду определённый и ограниченный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$. Операторнозначная функция комплексного аргумента $\lambda \to R_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1}$ называется резольвентой оператора A; она определена во всей комплексной плоскости, кроме собственных значений оператора A, играющих для неё роль особых точек. Область определения резольвенты называется *резольвентным множеством* оператора A, точки этого множества – *регулярными точками* оператора. Комплексная плоскость распадается на резольвентное множество и множество собственных значений (*спектр* оператора).

В бесконечномерном банаховом (или, в частности, гильбертовом) пространстве ситуация может быть существенно сложнее. Для фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ возможны следующие случаи:

1) уравнение (1) имеет ненулевое решение, то есть λ – *собственное значение* оператора A, ядро $\operatorname{Ker}(A-\lambda E) \neq \{0\}$; естественно, оператор $A-\lambda E$ при этом необратим (не является инъективным);

2) уравнение (1) имеет только тривиальное решение, т.е. оператор $A-\lambda E$ обратим (инъективен), причём обратный оператор $R_\lambda(A)=(A-\lambda E)^{-1}$ ограничен и определён на всём пространстве (оператор $A-\lambda E$ сюръективен); в этом случае λ, как и для конечномерного пространства, называется *регулярной точкой* оператора A, множество регулярных точек оператора – *резольвентным множеством*;

3) оператор $A-\lambda E$ обратим (инъективен, уравнение (1) имеет лишь нулевое решение), обратный оператор $R_\lambda(A)=(A-\lambda E)^{-1}$ определён на плотном в $\mathfrak{H}$ множестве, $\overline{\operatorname{Ran}(A-\lambda E)}=\mathfrak{H}$, но не ограничен; при этом $A-\lambda E$ не может оказаться сюръективным, $\operatorname{Ran}(A-\lambda E) \neq \mathfrak{H}$. В этом случае λ называется *точкой непрерывного спектра* оператора A;

4) оператор $A-\lambda E$ обратим (инъективен, уравнение (1) имеет лишь нулевое решение), но не сюръективен и, более того, его образ $\operatorname{Ran}(A-\lambda E)$ не является всюду плотным, т.е. оператор $R_\lambda(A)=(A-\lambda E)^{-1}$ существует, но не является плотно заданным: найдутся элементы, ортогональные всей его области определения – всему множеству $\operatorname{Ran}(A-\lambda E)$. В этом случае λ называется *точкой остаточного спектра* оператора A.

Множество собственных значений оператора в бесконечномерном пространстве называется также его *дискретным* (или *точечным*) *спектром*; дискретный спектр $\sigma_p(A)$, непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ и остаточный спектр $\sigma_r(A)$ в силу их определений не пересекаются, а их объединение называется спектром оператора и обозначается $\sigma(A)$. Из сказанного ясно, что спектр оператора в бесконечномерном пространстве можно определить как дополнение резольвентного множества $\rho(A)$ до комплексной плоскости.

Возможность наличия у оператора непрерывного и/или остаточного спектра является существенным отличием теории операторов в бесконечномерном пространстве от конечномерного случая. Известно [1], что спектр любого линейного ограниченного оператора – это непустое компактное подмножество комплексной плоскости.

Как и в конечномерном случае, на резольвентном множестве оператора определена резольвента $\lambda \to R_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1}$, являющаяся голоморфной [1, 3] операторнозначной функцией. Значение резольвенты на произвольном элементе $y \in \mathfrak{H}$ есть, очевидно, решение уравнения (2), так что регулярные точки оператора A – это в точности те комплексные числа λ, для которых (2) имеет решение $x \in \mathfrak{H}$ при любом $y \in \mathfrak{H}$ и при этом $\|x\| \le C\|y\|$ для некоторой константы C. В точках спектра резольвента либо вообще не существует (на дискретном спектре, это её изолированные особые точки), либо определена не на всем пространстве (для точек непрерывного и остаточного спектра).

В качестве естественного примера можно рассмотреть оператор, заданный интегралом с переменным верхним пределом:

$$J: f(t) \to \int_0^t f(s)ds$$

на множестве функций, суммируемых по Лебегу (либо суммируемых с квадратом по Лебегу) на отрезке $[0; 1]$. Мы рассмотрим некоторое усложнение этой задачи, а именно, повторный интеграл с переменными верхним и нижним пределами

$$\int_0^x dt \int_t^1 f(s)ds,$$

где функция f определена на промежутке [0;1], как оператор, действующий в функциональном пространстве $L_2(0;1)$:

$$J: f(x) \to \int_0^x dt \int_t^1 f(s)ds.$$

Для того чтобы построить резольвенту оператора, необходимо решить дифференциальное уравнение вида (2): $Jf - \lambda f = g$, то есть в данном случае

$$\int_0^x dt \int_t^1 f(s)ds - \lambda f(x) = g(x); \qquad (3)$$

подставляя $x = 0$, получаем $-\lambda f(0) = g(0)$. Дифференцируя обе части равенства (3), находим:

$$\int_x^1 f(s)ds - \lambda f'(x) = g'(x),$$

откуда, подставляя $x = 1$, находим $-\lambda f'(1) = g'(1)$, а после повторного дифференцирования получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$-f(x) — \lambda f''(x) = g''(x), \qquad \text{или} \qquad f + \lambda f'' = -g'' \qquad (4).$$

Очевидно, дифференциальное уравнение (4) вместе с указанными граничными условиями равносильно интегральному уравнению (3).

Рассмотрим три возможных случая для значений действительного параметра λ:

1) $\lambda < 0$; обозначая $\lambda = -\frac{1}{\omega^2}$, приходим к неоднородному линейному дифференциальному уравнению $f'' - \omega^2 f = g''\omega^2$, которому соответствует однородное уравнение $f'' - \omega^2 f = 0$ с общим решением

$$f(x) = C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x.$$

Варьируя произвольные постоянные, для функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражении общего решения неоднородного уравнения

$$f(x) = C_1(x) \operatorname{ch} \omega x + C_2(x) \operatorname{sh} \omega x$$

получаем систему условий

$$\begin{cases} C_1'(x)\operatorname{ch}\omega x + C_2'(x)\operatorname{sh}\omega x = 0, \\ C_1'(x)\omega\operatorname{sh}\omega x + C_2'(x)\omega\operatorname{ch}\omega x = \omega^2 g''(x); \end{cases}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega x & \operatorname{sh}\omega x \\ \omega\operatorname{sh}\omega x & \omega\operatorname{ch}\omega x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 g'' \end{pmatrix}; \quad \Delta = \omega(\operatorname{ch}^2\omega x - \operatorname{sh}^2\omega x) = \omega,$$

так что с помощью обратной матрицы находим

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \omega\operatorname{ch}\omega x & -\operatorname{sh}\omega x \\ -\omega\operatorname{sh}\omega x & \operatorname{ch}\omega x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 g'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\operatorname{sh}\omega x\, g''(x) \\ \omega\operatorname{ch}\omega x\, g''(x) \end{pmatrix},$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} = \omega\int_0^x \begin{pmatrix} -\operatorname{sh}\omega t \\ \operatorname{ch}\omega t \end{pmatrix} g''(t)\,dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u = \begin{pmatrix} -sh\,\omega t \\ ch\,\omega t \end{pmatrix}, & dv = g''(t)dt \\ du = \omega\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\omega t \\ sh\,\omega t \end{pmatrix}dt, & v = g'(t) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$= \omega\begin{pmatrix} -sh\,\omega t \\ ch\,\omega t \end{pmatrix} g'(t)\Big|_0^x + \omega^2\int_0^x \begin{pmatrix} ch\,\omega t \\ -sh\,\omega t \end{pmatrix} g'(t)\,dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \omega\begin{pmatrix} -\operatorname{sh}\omega x\, g'(x) \\ \operatorname{ch}\omega x\, g'(x) - g'(0) \end{pmatrix} + \omega^2\int_0^x \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega t \\ -\operatorname{sh}\omega t \end{pmatrix} g'(t)\,dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega t \\ -\operatorname{sh}\omega t \end{pmatrix}, & dv = g'(t)dt \\ du = \omega\begin{pmatrix} \operatorname{sh}\omega t \\ -\operatorname{ch}\omega t \end{pmatrix}dt, & v = g(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \omega\begin{pmatrix} -sh\,\omega x\, g'(x) \\ ch\,\omega x\, g'(x) - g'(0) \end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega t \\ -\operatorname{sh}\omega t \end{pmatrix} g(t)\Big|_0^x + \omega^3\int_0^x \begin{pmatrix} -\operatorname{sh}\omega t \\ \operatorname{ch}\omega t \end{pmatrix} g(t)\,dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$= \omega\begin{pmatrix} -\operatorname{sh}\omega x\, g'(x) \\ \operatorname{ch}\omega x\, g'(x) - g'(0) \end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega x\, g(x) - g(0) \\ -\operatorname{sh}\omega x\, g(x) \end{pmatrix} + \omega^3\int_0^x \begin{pmatrix} -\operatorname{sh}\omega t \\ \operatorname{ch}\omega t \end{pmatrix} g(t)\,dt +$$

$$+ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, получаем общее решение (4) в виде

$$f(x) = -\omega\operatorname{sh}\omega x\operatorname{ch}\omega x\, g'(x) + \omega\operatorname{ch}\omega x\operatorname{sh}\omega x\, g'(x) - \omega g'(0)\operatorname{sh}\omega x +$$

$$+\omega^2\operatorname{ch}^2\omega x\, g(x) - \omega^2 g(0)\operatorname{ch}\omega x - \omega^2\operatorname{sh}^2\omega x\, g(x) -$$

$$-\omega^3\, ch\,\omega x \int_0^x sh\,\omega t\, g(t)dt + \omega^3 \operatorname{sh}\omega x \int_0^x \operatorname{ch}\omega t\, g(t)dt + C_1 \operatorname{ch}\omega x + C_2 \operatorname{sh}\omega x =$$

$$= \omega^2 g(x) - \omega g'(0) \operatorname{sh}\omega x + \omega^2 g(0) \operatorname{ch}\omega x + \omega^3 \int_0^x \operatorname{sh}\omega(x-t)\, g(t)dt +$$

$$+ C_1 \operatorname{ch}\omega x + C_2 \operatorname{sh}\omega x\,, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя полученное равенство, находим:

$$f'(x) = \omega^2 g'(x) - \omega^2 g'(0) \operatorname{ch}\omega x + \omega^3 g(0) \operatorname{sh}\omega x + \omega^4 \int_0^x \operatorname{ch}\omega(x-t)\, g(t)dt$$

$$+ \omega C_1 \operatorname{sh}\omega x + \omega C_2 \operatorname{ch}\omega x\,;$$

подставим значение $x = 0$ в выражение для функции f и значение $x = 1$ в выражение для её производной и используем граничные условия, найденные ранее, которые с учётом замены $\lambda = -\frac{1}{\omega^2}$ принимают вид $f(0) = \omega^2 g(0)$ и $f'(1) = \omega^2 g'(1)$:

$$f(0) = 2\omega^2 g(0) + C_1,\ \ f'(1) = \omega^2 g'(1) - \omega^2 g'(0) \operatorname{ch}\omega + \omega^3 g(0) \operatorname{sh}\omega +$$

$$+\omega^4 \int_0^1 \operatorname{ch}\omega(1-t)\, g(t)dt + +\omega C_1 \operatorname{sh}\omega + \omega C_2 \operatorname{ch}\omega\,;$$

$$x = 0:\ \ f(0) = \omega^2 g(0) \Leftrightarrow 2\omega^2 g(0) + C_1 = \omega^2 g(0); \qquad C_1 = -\omega^2 g(0);$$

$$x = 1:\ \ f'(1) = \omega^2 g'(1) \Leftrightarrow\ \omega^2 g'(1) - \omega^2 g'(0) \operatorname{ch}\omega + \omega^3 g(0) \operatorname{sh}\omega +$$

$$+\omega C_1 \operatorname{sh}\omega + \omega C_2 \operatorname{ch}\omega + \omega^4 \int_0^1 \operatorname{ch}\omega(1-t)\, g(t)dt = \omega^2 g'(1).$$

Подставляя в последнее равенство $C_1 = -\omega^2 g(0)$ и упрощая, получаем уравнение относительно C_2:

$$-\omega^2 g'(0) \operatorname{ch}\omega + \omega C_2 \operatorname{ch}\omega + \omega^4 \int_0^1 \operatorname{ch}\omega(1-t)\ \ g(t)dt = 0$$

из которого

$$C_2 = \omega g'(0) - \frac{\omega^3}{\operatorname{ch}\omega} \int_0^1 \operatorname{ch}\omega(1-t)\, g(t)dt,$$

так что окончательно

$$f(x) = \omega^2 g(x) + \omega^3 \int_0^x \operatorname{sh}\omega(x-t)\, g(t)dt - \omega^3 \frac{\operatorname{sh}\omega x}{\operatorname{ch}\omega} \int_0^x \operatorname{ch}\omega(1-t)\, g(t)dt =$$

$$= \omega^2 g(x) + \omega^3 \left(\int_0^x \operatorname{sh}\omega(x-t)\, g(t)dt - \frac{\operatorname{sh}\omega x}{\operatorname{ch}\omega} \int_0^x \operatorname{ch}\omega(1-t)\, g(t)dt \right) =$$

$$= \omega^2 g(x) + \omega^3 \int_0^1 K(x;t) g(t)dt,$$

где ядро $K(x;t) = \begin{cases} \operatorname{sh}\omega(x-t) - \frac{\operatorname{sh}\omega x}{\operatorname{ch}\omega} \operatorname{ch}\omega(1-t), & t < x \\ -\frac{\operatorname{sh}\omega x}{\operatorname{ch}\omega} \operatorname{ch}\omega(1-t), & t > x. \end{cases}$

Итак, уравнение (2) с отрицательным λ всегда имеет единственное (выписанное выше) решение, т.е. оператор $R_\lambda(J) = (J - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda = -\frac{1}{\omega^2}$ определен для всех функций $g \in L_2(0;1)$ правилом

$$g(x) \to \omega^2 g(x) + \omega^3 \int_0^1 K(x;t) g(t)dt.$$

Этот оператор ограничен, поскольку ядро представляет собой ограниченную функцию:

$$\|R_\lambda(J) g\|^2 = \int_0^1 |R_\lambda(J) g(x)|^2 dx \le 2 \left(\omega^4 \|g\|^2 + \omega^6 \cdot \max\big(K(x;t)\big)^2 \cdot \|g\|^2 \right)$$

$$= C(\omega) \cdot \|g\|^2.$$

Таким образом, все $\lambda < 0$ являются регулярными точками оператора J.

2) $\lambda > 0$; обозначая $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, приходим к неоднородному линейному дифференциальному уравнению $f'' + \omega^2 f = -g''\omega^2$, которому соответствует однородное уравнение $f'' + \omega^2 f = 0$ с общим решением

$$f = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x.$$

Аналогично уже рассмотренному случаю получаем:

$$\begin{cases} C_1' \cos\omega x + C_2' \sin\omega x = 0; \\ -C_1' \omega \sin\omega x + C_2' \omega \cos\omega x = -g''(x)\omega^2; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\omega x & \sin\omega x\\ -\sin\omega x & \cos\omega x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\omega g''(x)\end{pmatrix};\ \ \Delta=\cos^2\omega x+\sin^2\omega x=1;$$

$$\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\omega x & -\sin\omega x\\ \sin\omega x & \cos\omega x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -\omega g''(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega g''(x)\sin\omega x\\ -\omega g''(x)\cos\omega x\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}C_1(x)\\ C_2(x)\end{pmatrix}=\omega\int\limits_0^x\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ -\cos\omega t\end{pmatrix}g''(t)\,dt+\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}u=\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ -\cos\omega t\end{pmatrix}, & dv=g''(t)dt\\ du=\omega\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}dt, & v=g'(t)\end{bmatrix}$$

$$=$$

$$=\omega\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ -\cos\omega t\end{pmatrix}g'(t)\Big|_0^x-\omega^2\int\limits_0^x\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}g'(t)\,dt\ +\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=$$

$$=\omega\begin{pmatrix}\sin\omega x\, g'(x)\\ -\cos\omega x\, g'(x)+g'(0)\end{pmatrix}-\omega^2\int\limits_0^x\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}g'(t)\,dt+\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}u=\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}, & dv=g'(t)dt\\ du=\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}dt, & v=g(t)\end{bmatrix}=$$

$$=\omega\begin{pmatrix}\sin\omega x\, g'(x)\\ -\cos\omega x\, g'(x)+g'(0)\end{pmatrix}-\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}g(t)\Big|_0^x+\omega^3\int\limits_0^x\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ -\cos\omega t\end{pmatrix}g(t)\,dt$$

$$+\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}u=\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} & dv=g'(t)dt\\ du=\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}dt & v=g(t)\end{bmatrix}=$$

$$=\omega\begin{pmatrix}\sin\omega x\, g'(x)\\ -\cos\omega x\, g'(x)+g'(0)\end{pmatrix}-\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}g(t)\Big|_0^x+\omega^3\int\limits_0^x\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}g(t)\,dt$$

$$+\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

$$=\omega\begin{pmatrix}\sin\omega x\, g'(x)\\ -\cos\omega x\, g'(x)+g'(0)\end{pmatrix}-\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega x\, g(x)-g(0)\\ \sin\omega x\, g(x)\end{pmatrix}+\omega^3\int\limits_0^x\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}g(t)\,dt$$

$$+$$

$$+\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

Получаем общее решение неоднородного уравнения (4):

$$f(x) = \omega\, sin\, \omega x \cos \omega x\, g'(x) - \omega \cos \omega x \sin \omega x\, g'(x) + \omega g'(0) \sin \omega x$$
$$- \omega^2 g(x) \cos^2 \omega x - \omega^2 g(x) \sin^2 \omega x + \omega^2 g(0) \cos \omega x +$$
$$+\omega^3 \int_0^x g(t)(-\cos \omega x \sin \omega t + \cos \omega t \sin \omega x)\, dt + C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x =$$
$$= -\omega^2 g(x) + \omega^2 g(0) \cos \omega x + \omega g'(0) \sin \omega x + \omega^3 \int_0^x \sin \omega(x-t)\, g(t) dt +$$
$$+C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

и его производную

$$f'(x) = -\omega^2 g'(x) - \omega^3 g(0) \sin \omega x + \omega^2 g'(0) \cos \omega x +$$
$$+\omega^4 \int_0^x \cos \omega(x-t)\, g(t) dt - \omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x.$$

В частности, $f(0) = -\omega^2 g(0) + \omega^2 g(0) + C_1 = C_1$,

$$f'(1) = -\omega^2 g'(1) - \omega^3 g(0) \sin \omega + \omega^2 g'(0) \cos \omega + \omega^4 \int_0^1 \cos \omega(1-t)\, g(t) dt -$$
$$-\omega C_1 \sin \omega + \omega C_2 \cos \omega.$$

Используем граничные условия $-\lambda f(0) = g(0)$, $-\lambda f'(1) = g'(1)$, которые при $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ принимают вид $f(0) = -\omega^2 g(0)$, $f'(1) = -\omega^2 g'(1)$:

$$C_1 = -\omega^2 g(0), \quad -\omega^2 g'(1) - \omega^3 g(0) \sin \omega + \omega^2 g'(0) \cos \omega +$$
$$+\omega^4 \int_0^1 \cos \omega(1-t)\, g(t) dt - -\omega C_1 \sin \omega + \omega C_2 \cos \omega = -\omega^2 g'(1).$$

Выписанная система условий даёт:

$$\omega^2 g'(0) \cos \omega + \omega^4 \int_0^1 \cos \omega(1-t)\, g(t) dt + \omega C_2 \cos \omega = 0,$$

откуда

$$C_2 \cos \omega = -\omega g'(0) \cos \omega - \omega^3 \int_0^1 \cos \omega(1-t)\, g(t) dt.$$

Получаем: либо $\cos\omega \neq 0$, и тогда

$$C_2 = -\omega g'(0) - \frac{\omega^3}{\cos\omega}\int_0^1 \cos\omega(1-t)\, g(t)dt,$$

$$f(x) = -\omega^2 g(x) + \omega^2 g(0)\cos\omega x + \omega g'(0)\sin\omega x + \omega^3\int_0^x \sin\omega(x-t)\, g(t)dt -$$

$$-\omega^2 g(0)\cos\omega x - \omega g'(0)\sin\omega x - \frac{\omega^3\sin\omega x}{\cos\omega}\int_0^1 \cos\omega(1-t)\, g(t)dt =$$

$$= -\omega^2 g(x) + \omega^3\int_0^x \sin\omega(x-t)\, g(t)dt - \frac{\omega^3\sin\omega x}{\cos\omega}\int_0^1 \cos\omega(1-t)\, g(t)dt =$$

$$= -\omega^2 g(x) + \omega^3\int_0^1 \widetilde{K}(x;t)g(t)dt,$$

где $\widetilde{K}(x;t) = \begin{cases} \sin\omega(x-t) - \frac{\sin\omega x}{\cos\omega}\cos\omega(1-t), & \text{если } t < x, \\ -\frac{\sin\omega x}{\cos\omega}\cos\omega(1-t), & \text{если } t > x. \end{cases}$

В этом случае уравнение (2) однозначно разрешимо при любом $g \in L_2(0;1)$, резольвента $R_\lambda(J) = (J - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, $\cos\omega \neq 0$ определена равенством

$$g(x) \to -\omega^2 g(x) + \omega^3\int_0^1 \widetilde{K}(x;t)g(t)dt$$

и является ограниченным оператором (последнее проверяется так же, как в случае $\lambda = -\frac{1}{\omega^2}$). Значения $\lambda = \frac{1}{\omega^2}, \omega \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ – регулярные точки оператора J.

Если $\cos\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, то следствие из системы граничных условий принимает вид

$$0 = \int_0^1 \cos\omega(1-t)\, g(t)dt, \qquad C_2 - \text{ любое.}$$

Тогда решение (2) существует лишь для тех $g \in L_2(0;1)$, которые удовлетворяют записанному условию, и в этом случае задается формулой

$$f(x) = -\omega^2 g(x) + \omega g'(0)\sin\omega x + \omega^3 \int_0^x \sin\omega(x-t)\, g(t)dt + C_2 \sin\omega x.$$

Таким образом, при $\lambda = \lambda_n = \frac{1}{\omega_n{}^2}$, $\omega_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ одному и тому же g соответствует множество значений f, т.е. оператор $J - \lambda I$ необратим. В частности, $g = 0$ соответствует множество функций вида $f(x) = C\sin\omega_n x$, составляющих ядро этого оператора (или, что то же самое, собственное подпространство оператора J, отвечающее собственному значению λ_n):

$$Ker(J - \lambda_n I) = \{C\sin\omega_n x \,|C \in \mathbb{R}\}.$$

Итак, числа λ_n входят в дискретный спектр оператора J. Отметим, что при $n \to \infty$

$$\lambda_n = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2} = \frac{4}{(\pi + 2\pi n)^2} = \frac{4}{\pi^2(1+2n)} \to 0.$$

3) осталось рассмотреть случай $\lambda = 0$, когда уравнение (4) принимает вид

$$f(x) = -g''(x),$$

а граничные условия – вид $g(0) = 0; g'(1) = 0$. Очевидно, в этом случае уравнение с учётом граничных условий имеет единственное решение, т.е. резольвента $R_0(J) = J^{-1}$ существует и определена правилом

$$g(x) \to -g''(x),$$

однако не на всём пространстве $L_2(0;1)$, но на его плотном подмножестве, и при этом не является ограниченным оператором. Следовательно, $\lambda = 0$ – точка непрерывного спектра оператора J. Можно проверить, что невещественные значения λ являются регулярными точками оператора. Тогда спектр в целом состоит из дискретного и непрерывного спектра:

$$\sigma(J) = \sigma_p(J) \cup \sigma_c(J) = \left\{\frac{4}{\pi^2(1+2n)} \middle| n \in \mathbb{Z}_0\right\} \cup \{0\}.$$

Видим, что оператор обладает счётным дискретным спектром, сосредоточенным на положительной полуоси вещественной прямой, причём все собственные значения простые, отвечающие им собственные подпространства одномерны. Единственная точка спектра, не являющаяся собственным значением оператора, служит пределом убывающей последовательности точек дискретного спектра. Итак, спектр оператора J полностью охарактеризован, найдены также его собственные функции, отвечающие точкам дискретного спектра.

Проведённое нами прямое, опирающееся непосредственно на определения исследование спектра может быть реализовано и для некоторых других интегральных (а также дифференциальных, разностных) операторов; в тех случаях, когда это возможно, такой подход способствует прочному освоению базовых понятий спектральной теории линейных операторов.

Список использованных источников

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т.1. – М.: Наука, 1977. – 314 с.

2. Треногин В.М. Функциональный анализ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.

3. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.