УДК 330.4 + 372.851

ББК 22.19 +22.141

К вопросу о подготовке учащихся к решению задач на кредиты: параллельное решение задач по двум схемам платежей

Федцова Екатерина Руслановна,

студент 4 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Математика. Информатика»

(**руководитель: Глухова Наталья Владимировна,**

кандидат биологических наук, доцент кафедры высшей математики)

ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Аннотация. В настоящей статье подробно рассматриваются способы погашения кредита, такие как аннуитетные и дифференцированные платежи. Указываются отличия между данными выплатами, выводятся общие формулы для расчета данных платежей и осуществляется разбор схем выплаты кредита на конкретных примерах.

Ключевые слова: единый государственный экзамен, аннуитетные и дифференцированные платежи, кредит, сумма выплат, долг.

В современной жизни многие люди берут кредиты в виду различных обстоятельств: покупка квартиры, вложение в собственное дело и т.д. Но прежде чем взять на себя такую ответственность, нужно хорошо подумать и рассчитать, какую сумму придется выплатить в итоге, каков будет размер переплат, а также какой тип погашения кредита будет выгоднее: аннуитетный или дифференцированный. «Аннуитетный платеж – это система выплат, при которой сумма ежемесячного (ежеквартального или ежегодного) платежа фиксируется на весь срок кредитования. Дифференцированный платеж – это система выплат, при которой ежемесячный платеж включает в себя постоянную сумму для погашения основного долга по кредиту и проценты на оставшуюся часть долга» [4, с. 108]. В связи с актуальностью данного вопроса в жизни человека, задания на кредиты все чаще включают в задания единого государственного экзамена [10]. Многие школьники при подготовке к экзамену сталкиваются с трудностями в решении задач на кредиты. Они допускают много ошибок, связанных в первую очередь с тем, что неверно составляют математическую модель, то есть неправильно определяют тип платежей. Помимо этого они не имеют четкого представления о существующих принципах погашения кредитов, что во многом затрудняет их понимание общего алгоритма начисления выплат. Поэтому для решения текущей проблемы, необходимо разобрать каждый способ погашения кредита более детально: изучить принципиальные особенности различных схем погашения кредитов, выявить их отличительные признаки, разобрать решение задач, как в общем виде, так и на конкретных примерах. В настоящей статье представлена краткая методическая разработка по данной теме, в которой предлагается сравнительная характеристика двух типов платежей. Разбор начнем с аннуитетных платежей.

1. Аннуитетный платеж

Принцип работы: Каждый период необходимо выплачивать фиксированную сумму, которая неизменна на протяжении всего срока кредитования.

Характерная особенность: «Выплаты кредита производятся равными ежемесячными (ежегодными) платежами» [3, с. 120].

Плюсы:

- фиксированная сумма выплат.

Минусы:

- общая сумма переплат за весь период кредитования в результате получается больше, чем при дифференцированных платежах.

Рассмотрим в общем виде алгоритм выплаты кредита при аннуитетных платежах:

Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита, если **долг выплачивается равными ежемесячными (ежегодными) платежами.**

Решение:

Пусть S – сумма кредита, b – ежемесячный (ежегодный) платеж, q – процентная ставка по кредиту. Тогда в начале каждого периода **оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $k = 1 + 0{,}01q$.** Через S_i будем обозначать сумму долга после начисления процентов на начало i-го периода, а сумму долга на конец i-го периода будем обозначать тем же символом, но с чертой сверху. В S_1 строке ставится прочерк, так как в начале периода никаких выплат не происходило.

Составим таблицу:

Период	Долг	Платеж
S_1 – сумма долга после начисления процентов на начало первого периода	Sk	–
$\overline{S_1}$ – сумма долга после 1-ой выплаты на конец первого периода	$Sk – b$	b
S_2	$\overline{S_1}k = (Sk – b)k = Sk^2 – bk$	–
$\overline{S_2}$	$\overline{S_1}k – b = (Sk – b)k – b = Sk^2 –$ – $bk – b$	b

S_3	$\overline{S_2}k = ((Sk - b)k - b)k = Sk^3 - - bk^2 - bk$	–
$\overline{S_3}$	$\overline{S_2}k - b = ((Sk - b)k - b)k - b = = Sk^3 - bk^2 - bk - b$	b
S_4	$\overline{S_3}k = (((Sk - b)k - b)k - b)k = = Sk^4 - bk^3 - bk^2 - bk$	–
$\overline{S_4}$	$\overline{S_3}k - b = (((Sk - b)k - b)k - - b)k - b = Sk^4 - bk^3 - bk^2 - bk - b$	b
…	…	…
S_n	$\overline{S_{n-1}} \cdot k$	–
$\overline{S_n}$	$\overline{S_{n-1}} \cdot k - b = Sk^n - bk^{n-1} - - bk^{n-2} - \ldots - bk - b = Sk^n - b(k^{n-1} + + k^{n-2} + \ldots + k + 1) = 0$	b

Долг в последней строке таблицы приравнивается к нулю, так как при последнем платеже долг полностью погашается.

Решим данное уравнение:

$Sk^n - b(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k + 1) = 0$. Заметим, что выражение в скобках – сумма геометрической прогрессии с $q = k$ и $b_1 = 1$. Тогда уравнение примет вид:

$Sk^n - b \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0;$

$Sk^n = b \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1};$

$b = \frac{Sk^n (k - 1)}{k^n - 1}.$

В итоге, общая сумма выплат P может быть вычислена по формуле $P = = n \cdot b = n \cdot \frac{Sk^n (k - 1)}{k^n - 1}$, где n – число месяцев (лет).

Далее разберемся с дифференцированными платежами.

2. *Дифференцированный платеж*

Принцип работы: Дифференцированный платеж предполагает уменьшение суммы долга на одну и ту же сумму. Каждый такой платеж состоит из двух компонентов: тело кредита и процента. Тело кредита – это неизменная величина, которая идет на выплату основного долга, а проценты всегда начисляются на остаток долга.

Характерная особенность: долг уменьшается на одну и ту же величину.

Плюсы:

- общая сумма выплат банку по процентам значительно меньше, чем при аннуитетной форме погашения кредита;

- равномерное снижение суммы долга по кредиту.

Минусы:

- большая сумма первоначальных взносов;

- платежи в каждый период разные.

Перейдем к алгоритму расчета выплат по кредиту, в общем виде, при дифференцированной системе платежей:

Пусть планируется взять кредит в банке на некоторый период (месяц, год) в размере суммы S.

Условия его возврата следующие:

- в начале каждого периода долг увеличивается на q % по сравнению с концом предыдущего периода.

- до конца каждого периода необходимо выплатить часть долга.

- после платежа **долг каждый период должен быть на одну и ту же сумму меньше** долга на конец предыдущего периода.

Найти общую сумму выплат, после полного погашения кредита.

Решение:

Пусть S − сумма кредита, q − процентная ставка по кредиту, S_i − сумма долга на конец i-го периода. Через b_i обозначим общий ежемесячный (ежегодный) платеж в i-ый период, который можно представить в виде формулы $b_i = \frac{S}{n} + \%_n$, где $\frac{S}{n}$ − часть основного долга, n − число месяцев (лет), на которое планируется взять кредит, $\%_i$ – начисленные проценты на i-ый период.

Составим таблицу:

Период	Долг	Выплаты		
		Погашение основного долга	Погашение процентов	Общее погашение
S_1	S	$\frac{S}{n}$	Sq	$b_1 = \frac{S}{n} + \%_1 = \frac{S}{n} + Sq$
S_2	$S - \frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}$	$\left(S - \frac{S}{n}\right) q$	$b_2 = \frac{S}{n} + \%_2 = \frac{S}{n} + \ + \left(S - \frac{S}{n}\right) q$
S_3	$S - \frac{S}{n} - \frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}$	$\left(S - \frac{2S}{n}\right) q$	$b_3 = \frac{S}{n} + \%_3 = \frac{S}{n} + \ + \left(S - \frac{2S}{n}\right) q$
…	…	…	…	…
S_n	$S - (n-1) \cdot \frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}$	$S - (n-1) \cdot \frac{S}{n} \cdot q$	$b_n = \frac{S}{n} + \%_n = \frac{S}{n} + \ + \left(S - (n-1) \cdot \frac{S}{n}\right) \cdot \cdot q$

Тогда общая сумма платежей, есть $P = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \frac{S}{n} + Sq + + \frac{S}{n} + \left(S - \frac{S}{n}\right) q + \frac{S}{n} + \left(S - \frac{2S}{n}\right) q + \ldots + \frac{S}{n} + \left(S - (n-1) \cdot \frac{S}{n}\right) \cdot q = \frac{S}{n} + Sq + \frac{S}{n} + + \frac{nSq - Sq}{n} + \frac{S}{n} + \frac{nSq - 2Sq}{n} + \ldots + \frac{S}{n} + \frac{nSq - (n-1)Sq}{n} = \frac{S}{n}(1 + 1 + 1 + \ldots + 1) + + Sq \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{n-(n-1)}{n}\right) = \frac{Sn}{n} + Sq \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + + \frac{n-(n-1)}{n}\right) = S + Sq \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$

Заметим, что $1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ – сумма арифметической прогрессии с $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{n}$. Тогда P примет вид $P = S + Sq\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n}{2}\right) = S +$ $+ Sq\left(\frac{n+1}{2}\right) = S\left(1 + q\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)$.

Покажем применение описанных выше схем на примере конкретной задачи.

Георгий планирует взять кредит в банке в размере 150000 руб. на 4 года.

Банк предлагает две схемы погашения кредита.

Схема выплаты кредита при аннуитетных платежах следующая:

В начале каждого года долг будет увеличиваться на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате кредит будет погашен четырьмя равными платежами.

Схема выплаты кредита при дифференцированных платежах:

В начале каждого года долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года. Далее до конца года необходимо выплачивать одним платежом часть долга. В результате платежа долг каждый год уменьшается на одну и ту же сумму.

Какая схема для Георгия будет самой оптимальной? Чему равна суммарная переплата при каждой схеме?

Рассмотрим сначала первую схему выплат.

Пусть S = 150000, q = 10 %, k = 1 + 0,01q = 1,1, b – ежегодный платеж.

Составим таблицу:

Период	Долг	Платеж
S_1	$1{,}1 \cdot S$	-
$\overline{S_1}$	$1{,}1 \cdot S - b$	b
S_2	$(1{,}1 \cdot S - b) \cdot 1{,}1 = 1{,}1^2 \cdot S - b \cdot 1{,}1$	-

$\overline{S_2}$	$1{,}1^2 \cdot S - b \cdot 1{,}1 - b$	b
S_3	$(1{,}1^2 \cdot S - b \cdot 1{,}1 - b) \cdot 1{,}1 = 1{,}1^3 \cdot S - b \cdot 1{,}1^2 - b \cdot 1{,}1$	-
$\overline{S_3}$	$1{,}1^3 \cdot S - b \cdot 1{,}1^2 - b \cdot 1{,}1 - b$	b
S_4	$(1{,}1^3 \cdot S - b \cdot 1{,}1^2 - b \cdot 1{,}1 - b) \cdot 1{,}1 = 1{,}1^4 \cdot S - b \cdot$ $\cdot 1{,}1^3 - b \cdot 1{,}1^2 - b \cdot 1{,}1$	-
$\overline{S_4}$	$1{,}1^4 \cdot S - b \cdot 1{,}1^3 - b \cdot 1{,}1^2 - b \cdot 1{,}1 - b = 0$	b

$1{,}1^4 \cdot S - b \cdot 1{,}1^3 - b \cdot 1{,}1^2 - b \cdot 1{,}1 - b = 0;$

$1{,}1^4 \cdot S - b(1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1 + 1) = 0;$

$1{,}1^4 \cdot S - b \cdot \frac{1{,}1^4 - 1}{1{,}1 - 1} = 0;$

$$b = \frac{S \cdot 1{,}1^4(1{,}1 - 1)}{1{,}1^4 - 1} = \frac{S \cdot 1{,}1^4 \cdot 0{,}1}{(1{,}1^2)^2 - 1} = \frac{S \cdot 1{,}1^4 \cdot 0{,}1}{(1{,}1^2 - 1)(1{,}1^2 + 1)} = \frac{S \cdot 1{,}1^4 \cdot 0{,}1}{(1{,}1 - 1)(1{,}1 + 1)(1{,}1^2 + 1)} =$$

$$= \frac{150000 \cdot 1{,}1^4}{(1{,}1 + 1)(1{,}1^2 + 1)} = \frac{150000 \cdot 1{,}4641}{2{,}1 \cdot 2{,}21} = \frac{219615}{4{,}641} = 47320{,}6206$$

$P = 4 \cdot 47320{,}6206 = 189282{,}482.$

По данной схеме Георгий каждый год будет выплачивать банку 47320,6206 руб., а общая сумма выплат за 4 года составит 189282,482 руб. В результате переплата по кредиту составит 39282,482 руб.

Теперь рассмотрим вторую схему выплат.

Пусть $S = 150000$, $q = 10$ %, $n = 4$.

Составим таблицу:

Период	Долг	Выплаты		
		Погашение основного долга	Погашение процентов	Общее погашение
S_1	S	$\frac{S}{4}$	$S \cdot 0{,}1$	$b_1 = \frac{S}{4} + \%_1 = \frac{S}{4} +$ $+ S \cdot 0{,}1$

S_2	$S-\frac{S}{4}$	$\frac{S}{4}$	$\left(S-\frac{S}{4}\right)\cdot 0{,}1$	$b_2=\frac{S}{4}+\%_2=\frac{S}{4}+$ $+\left(S-\frac{S}{4}\right)\cdot 0{,}1$
S_3	$S-\frac{S}{4}-\frac{S}{4}$	$\frac{S}{4}$	$\left(S-\frac{2S}{4}\right)\cdot 0{,}1$	$b_3=\frac{S}{4}+\%_3=\frac{S}{4}+$ $+\left(S-\frac{2S}{4}\right)\cdot 0{,}1$
S_4	$S-\frac{S}{4}-\frac{S}{4}-\frac{S}{4}$	$\frac{S}{4}$	$\left(S-\frac{3S}{4}\right)\cdot 0{,}1$	$b_4=\frac{S}{4}+\%_4=\frac{S}{4}+$ $+\left(S-\frac{3S}{4}\right)\cdot 0{,}1$

$$P=b_1+b_2+b_3+b_4=\frac{S}{4}+S\cdot 0{,}1+\frac{S}{4}+\left(S-\frac{S}{4}\right)\cdot 0{,}1+\frac{S}{4}+\left(S-\frac{2S}{4}\right)\cdot 0{,}1+ +\frac{S}{4}+\left(S-\frac{3S}{4}\right)\cdot 0{,}1=4\cdot\frac{S}{4}+S\cdot 0{,}1\left(1+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)=S+S\cdot 0{,}1\left(\frac{\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot 4}{2}\right)= =150000+150000\cdot 0{,}1\cdot 2{,}5=150000+37500=187500.$$

В итоге по этой схеме за 4 года Георгий выплатит 187500 руб., а переплата по кредиту будет 37500 руб.

Таким образом, самой оптимальной для Георгия будет схема дифференцированных платежей. Разница между переплатами составляет 189282,482 − 187500 = 1782,482 руб.

В заключении можно отметить, что решение задач такого плана парами, то есть с рассмотрением сразу двух схем платежей, позволит не только лучше подготовить школьников к единому государственному экзамену, приучив их различать классы задач, но и будет способствовать формированию у них экономической грамотности [1, с. 112], обучать правильному экономическому поведению.

Список использованных источников

1. Глухова Н. В. Олимпиадные задачи по математике как средство формирования экономической грамотности школьников // Поволжский педагогический поиск. 2018. № 3 (25) С. 108 – 115.

2. Кочагин В.В. ЕГЭ 2019. Математика: сборник заданий: 500 заданий с ответами. М.: Эксмо, 2018. 256 с.

3. Малкова А.Г. Математика: задания высокой и повышенной сложности. Ростов н/Д: Феникс, 2019. 221 с.

4. Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развернутым ответом / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Ростов-на-Дону: Легион, 2016. 368 с.

5. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2019. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2019 года: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Ростов-на-Дону: Легион, 2018. 432 с.

6. Математика: большой сборник тематических заданий для подготовки к единому государственному экзамену: профильный уровень / под ред. И.В. Ященко. М.: АСТ, 2018. 159 с.

7. Мищенко О.В., финансовая математика [Электронный ресурс]. – URL: https://multiurok.ru/files/finansovaia-matiematika-1.html (Дата обращения: 02.11.2018)

8. Ларин Александр Александрович [Электронный ресурс]. – URL: http://alexlarin.net/ege/2018/17_2018.html (Дата обращения: 17.11.2018)

9. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовке к ЕГЭ [Электронный ресурс]. – URL: https://ege.sdamgia.ru/ (Дата обращения: 18.11.2018)

10. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. – URL: http://www.fipi.ru/ (Дата обращения: 18.11.2018)