УДК: 519:11, 510:6, 372:851

ББК: 22:12, 22:141

Формирование новых олимпиадных задач путем варьирования условий: логические задачи и комбинаторика

Малкова Ольга Андреевна,

студент 4 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Математика. Информатика»,

Борисова Евгения Олеговна,

студент 4 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Математика. Информатика»

Глухова Наталья Владимировна,

кандидат биологических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», г. Ульяновск, Россия

Исследование выполнено в рамках внутривузовского гранта для поддержки научных коллективов ФГБОУ ВО "УлГПУ им. И.Н. Ульянова", 2018 год.

Аннотация. В работе рассмотрены некоторые подходы к варьированию условий олимпиадных задач на комбинаторику и логику, которые позволяют, сохраняя логическую структуру и уровень сложности некоторых образцов, создавать новые задачи, которые учащиеся уже не могут найти в интернете и других источниках. Построение новых задач является совершенно необходимым в условиях глобальной информатизации общества, так как только новые задачи, решения которых нет в интернете, могут хоть сколько-то обеспечивать объективность конкурсного отбора. Представлены некоторые новые задачи олимпиадного характера по заданной теме, рассмотрены методы их решения.

Ключевые слова. Олимпиадная математика, логические задачи, принцип Дирихле, комбинаторика, сочетания с повторениями и без повторений, правило произведения.

В последнее время в системе образования существенно возросла роль различных предметных олимпиад, в том числе и олимпиад по математике. В частности, призовые места, занимаемые школьниками на олимпиадах различного уровня, дают им льготы при поступлении в вуз, являются критерием отбора учащихся для участия в различных мероприятиях (например, математических школах), а также являются одним из параметров оценки качества работы школы в целом. Вместе с тем, в связи существенным нарастанием информационной грамотности школьников, особенно остро встает и проблема объективности такого критерия качества как результативность школьников на олимпиадах. Использование на олимпиадах задач из существующих сборников часто приводит к тому, что предлагаемые варианты заданий будут решены не самостоятельно, а с применением такого «источника знаний», как интернет, в котором уже имеются готовые решения рассматриваемых задач. Если в условиях проведения очных олимпиад еще как-то можно надеяться на то, что школьники не будут допущены к применению телефонов с выходом в интернет (что далеко не всегда можно реализовать практически), то в условиях многочисленных заочных олимпиад, а также при выдаче домашних заданий для школьников в рамках занятий по подготовке к олимпиадам, отследить, будут ли ученики использовать интернет или нет, становится совершенно невозможным. Поэтому в современных условиях для учителя становится совершенно необходимым умение составлять олимпиадные задачи самостоятельно. В работе [7, с. 125] были ранее рассмотрены некоторые подходы к составлению задач на делимость. В настоящей статье мы рассмотрим несколько приемов, позволяющих изменять условия логических и комбинаторных задач, сохраняя их структуру, но меняя их сюжет таким образом, чтобы школьники уже не смогли опознать эти задачи среди уже известных, и найти их решения путем простого поиска в интернете.

В логических задачах обычно используется схема, в которой несколько участников произносят противоречивые друг другу высказывания. При этом указывается общее количество участников, их высказывания и количество истинных и ложных высказываний.

Например, в задаче [4, с. 60, № 3.55] используется следующая логическая конструкция:

Берутся 3 высказывания X_i, где i = 1, 2, 3. Из них составляются боле сложные высказывания:

$\neg X_1 \wedge X_2$,

$X_1 \wedge \neg X_3$,

$\neg X_2$.

Высказывания X_i можно заменить любым конкретным предложением. Например:

Один из трёх учеников подложил учителю кнопку:
– Коля этого не делал, – сказал Илья, – это сделал Денис.
– Что ты можешь сказать в своё оправдание? – спросил учитель Дениса.
– Это сделал Коля, – сказал Денис – а Илья этого не делал.
– Я уверен, что это сделал не Денис. А я сегодня съел Машину порцию в столовой. – сказал Коля. В итоге, учитель узнал, что двое учеников сказали в каждом из двух случаев истину, а один оба раза обманул. Кто подложил кнопку учителю?

Мы знаем, что двое мальчиков в обоих случаях сказали правду, а один мальчик соврал оба раза. Посмотрим на ответы Ильи и Дениса. Мы встречаем явное противоречие, так как Илья сказал, что Коля не подкладывал кнопку, а Денис сказал, что это сделал Коля. Значит, кто-то из мальчиков говорит неправду. Рассмотрим теперь высказывания Ильи и Коли. Мы также встречаем противоречие, так как Илья сказал, что это сделал Денис, а Коля говорит, что Денис этого не делал. Из этого можно заключить, что Илья говорит неправду, а правду говорят Денис и Коля. А из их слов следует, что кнопку учителю подложил Коля.

Как видим, решение этой задачи ничем не отличается от исходной [4, с. 60, № 3.55], но все слова в задачах различны, что не позволяет отыскать эту задачу в интернете. Не смотря на это, в задачах есть и заметное сходство, поскольку и в той и в другой задач речь идет о правонарушениях (в исходной задаче один из детей испачкал скатерть).Чтобы сделать задачу совсем неузнаваемой, можно, используя эту же логическую конструкцию, сформулировать задачу не о правонарушителях, а, например, о нахождении числа. Например, можно составить такую задачу:

Известно, что из трёх утверждений два истинны, а одно ложное.

1) x не делится на 3 и $x \geq 4$,
2) $x \vdots 3$ и x – натуральное число,
3) x меньше 4 и x принадлежит множеству целых чисел.

Найдите число x.

При построении этой задачи мы поступали следующим образом. Выбрали конкретное число 3 и сформулировали относительно него три утверждения, которые вместе гарантируют однозначное нахождение данного числа: «x – натуральное», «$x < 4$», «$x \vdots 3$». Очевидно, единственное число, удовлетворяющее всем условиям – это 3. Тогда, исходя из схемы предыдущей задачи (два элементарных высказывания истинны, а одно ложно), мы заменим одно из высказываний на его отрицание. В примере заменили $x< 4$ на $x \geq 4$. Далее составили из них конструкцию по формулам из предыдущей задачи. В третьем высказывании добавили истинное высказывание, которое никак не влияет на решение задачи по образцу из [4, с. 60, № 3.55].

Другой тип логических задач основан на построении конструкции, в которой участники говорят «я не знаю результат», «я не знал, теперь знаю», «теперь я тоже знаю».

Примеры таких задач можно посмотреть, например, на сайте [6].

Взяв за основу задачу об угадывании дня рожденья [6], [2, с.13, № 1.3.16], преобразили ее следующим образом:

Задача о государственной тайне. «Его высокопревосходительство генерал Ляпус объявил всем своим подчиненным: "Секретная военная операция назначена на один из следующих дней будущего года: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа, 17 августа. Поэтому в каждый из этих дней все части должны быть в полной боевой готовности. Ввиду особой секретности, месяц, на который назначена операция, я сообщил только своему первому адъютанту подполковнику князю Талантову, а день (число) известно только моему второму адъютанту майору графу Разумовскому". После того, как генерал удалился, между его адъютантами произошел следующий разговор: Князь: "Хотя полная дата начала операции мне неведома, однако ж, доподлинно известно, что и Вы ее не знаете, Ваше высокоблагородие". Граф: "Так точно, Ваше сиятельство, не знал за секунду до того, как Вы это сказали, но теперь, видите ли, она мне стала известна". Князь: "Так ведь теперь и мне она известна, Ваше высокоблагородие..." На какую дату назначена операция, если учесть, что все военные были люди благородные, а, следовательно, говорили только правду?» [см. 2, с. 13 – 14, № 1.3.17].

В данной задаче изменен текст, но по-прежнему рассматриваются 3 участника, двое из которых угадывают дату, которую загадал третий. Представляется десять дат и предлагается угадать, какая это дата. Числа и месяцы оставлены без изменений. В числе этих десяти дат есть такие, в которых повторяется месяц. И некоторые числа встречаются в двух разных месяцах. Так как первый и второй участники изначально сказали, что они не знают дату, следовательно, если бы им назвали месяц (число), который(ое) встречается в задаче один раз, он бы сразу знал всю дату. На этом этапе, мы исключаем все даты, в которых месяц встречается только один раз и те даты, в которых день встречается только один раз. А значит, и добавление дат, в которых месяц или число не встречаются в других датах (т. е. встречаются по одному разу), не повлияет на ход решения. Далее Граф делает вывод о дате. И он это может сделать, только если число в оставшихся месяцах не повторяется.

Значит, все даты, в которых одни и те же числа присутствуют несколько раз, мы также исключаем при решении, и можем их добавить при составлении задачи. На последнем шаге, Князь также узнает эту дату. Таким образом, у нас должен остаться единственный день в одном из месяцев, а во всех других месяцах, должно быть как минимум 2 числа, которые мы не исключили на предыдущих этапах. В противном случае, мы не сможем выбрать единственную дату.

Поэтому при формулировании подобных задач, мы должны сохранять количество повторяющихся чисел и месяцев в датах, но, разумеется, можно менять и сами числа, и месяцы, а также, как отмечено выше, добавлять неповторяющиеся даты. Например, в данной задаче можно было бы использовать даты: 5 января, 6 января, 7 января, 8 февраля, 9 февраля, 5 марта, 9 марта, 10 марта, 6 апреля, 10 апреля, 4 мая, 11 мая. [2, с.13 – 14, № 1.3.17],

Рассмотрим теперь такой тип логических задач, которые решаются с помощью принципа Дирихле. В школьном курсе не рассматривают данную тему, но она может быть рассмотрена на факультативных занятиях и в рамках математических кружков. Нередко, задачи на применение данного принципа, содержатся в олимпиадных работах. Примеры задач, решение которых основано на принципе Дирихле, можно найти в учебных изданиях [5, с. 11, № 27] и [3, с. 45, № 5.95].

В задаче [5, с. 11, № 27] ведется речь о семи мальчиках, каждый из которых в течение дня три раза подходил к киоску с мороженным. Также вводится условие, что каждые два из них встречались около этого киоска. Необходимо доказать, что в некоторый момент там встречались одновременно три мальчика.

Составим аналогичную задачу, изменяя сюжет. «Семь гномов живут каждый в отдельной комнате в доме, в котором все двери комнат выходят в общую столовую, куда гномы выходят поесть в любое время, когда им только захочется. Остальное время гномы работают в своих комнатах и больше никуда не выходят. Друг к другу в комнаты гномы тоже никогда не заходят.

Известно, что в воскресенье каждый гном выходил из своей комнаты в столовую ровно три раза. Известно также, что каждый из гномов в это воскресенье встретился со всеми остальными гномами, живущими в этом доме. Докажите, что в какой-то момент времени в столовой было не меньше трех гномов одновременно» [2, с. 6].

Решая данную задачу, допустим, что во время каждой встречи в месте X (в столовой, у киоска) присутствовало только два участника (гном, мальчик). Обязательным условием является то, что после каждой встречи участников, минимум один (гном, мальчик и т.д) должен уходить, иначе их будет трое, и требуемое доказано.

Исходя из условия задачи, должна произойти двадцать одна встреча (каждый из семи участников встречается с шестью другими ($7 \times 6 = 42$), но при каждой встрече присутствуют два участника, значит, произошла двадцать одна встреча).

Если в каждый момент времени в месте X было не более двух участников, то после каждой встречи один из них должен уходить из места X до того, как придет следующий участник (об этом говорилось ранее). Значит, после первых двадцати встреч участники должны покинуть место X минимум двадцать раз. Но после последней встречи должны уйти все, а участников уже двое, то есть «уходов» из места X должно быть двадцать два. Но так как известно, что каждый гном выходил в столовую три раза, а гномов всего семь, то, вместе взятые, они выходили из столовой двадцати один раз, а, следовательно, и уйти из столовой должны тоже не более чем 21 раз, что противоречит нашему выводу о том, что «уходов» было 22. Таким образом, наше предположение о том, что в каждую «встречу» в столовой находилось по 2 участника не верно. Следовательно, в какой-то момент в месте X будет не меньше трех участников одновременно.

Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и иных объектов. Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов, называется комбинаторикой. В школьной практике, как правило, встречаются лишь достаточно стереотипные задачи на применение формул сочетаний, перестановок и размещений (с повторениями и без). Тем не менее эти задачи бывают достаточно сложны для учащихся, так как за разнообразием текстов им бывает достаточно сложно вычленить правильную формулу. Очень часто выбор формулы осуществляется фактически «наугад», без твердого понимания, почему именно данная формула используется в этом контексте. Чтобы избежать этого в первую очередь можно попытаться не использовать классическую формулировку вопроса комбинаторной задачи «сколькими способами можно…» с тем, чтобы не вызвать у школьников прямых ассоциаций с тем, что это задача именно на комбинаторику (возможно, побудив его искать решение задачи без применения формул, что чаще всего бывает более разумно и естественно – механическое применение формул чаще всего лишь вносит еще большую путаницу в понимание сути комбинаторных методов, особенно это касается задач на размещение). Кроме того полезно формулировать в задаче сразу несколько внешне похожих вопросов, для ответа на которые приходится применять разные формулы (это снижает вероятность случайного угадывания и в большей степени показывает на сколько осознанно школьник подходит к выбору формулы). Приведем пример такой формулировки:

«Работодатель решил сделать подарки к 8 марта всем девушкам, которые работают в его отделе. Он хочет, чтобы все сотрудницы получили разные букеты. В коллективе 21 сотрудница. В магазине были розы пяти цветов: розовые, красные, белые, желтые, оранжевые. Можно ли это сделать, при условии:

а) что каждый букет будет состоять из трех роз различных цветов?

б) в одном букете цвета роз могут повторяться (не требуется, чтобы все розы были разными)?

При решении пункта (а) можно воспользоваться формулой сочетаний без повторений. Тогда решение будет выглядеть следующим образом:

$$С_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$С_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ способов. Следовательно, можно составить только 10 букетов из трех роз, так чтобы все цвета были различны, а обеспечить ими 21 сотрудницу нельзя. Вместо формулы можно воспользоваться методом перебора всевозможных вариантов из трех роз, при условии, чтобы цвета в букете не повторялись (способ подходит только для небольшого количества объектов). Можно было бы решать эту задачу лишь с помощью правила произведения (как и большинство комбинаторных задач): первую розу можно выбрать 5 способами, вторую 4 способами, третью 3 (итого 60 способов). Но так как порядок роз в букете не важен, то каждый букет можно упорядочить 3! = 6 способами, то есть наши 60 вариантов можно разбить на группы по 6 одинаковых букетов в каждом. Таких групп будет 60:6 = 10, то есть 10 разных видов букетов.

Для решения пункта (б) можно воспользоваться формулой сочетаний с повторениями $\widetilde{С_n^k} = C_{n+k-1}^k$. Подставляя значения в формулу, получим $\widetilde{С_5^3} = C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$ способов для составления различных букетов, в каждом из которых цвета роз могут повторяться. Однако, учитывая то, что данная формула встречается достаточно редко и, как правило, неизвестна школьникам, можно предложить другой способ решения данной задачи.

В первую очередь, как и ранее, подсчитаем, сколько существует вариантов составления букетов, в которых цвета роз не повторяются (их будет 10). Затем подсчитаем количество различных букетов, в которых имеются минимум две розы одного цвета. Тогда цвет повторяющихся роз можно выбрать 5 различными способами. К ним можно добавить любую третью розу (как такого же цвета – тогда мы получим букет с тремя одинаковыми розами, так и любого другого) – выбрать эту розу можно также пятью способами.

Тогда по правилу произведения существует $5 \times 5 = 25$ различных букетов с повторяющимися цветами роз. Значит, всего вариантов будет $25 + 10 = 35$, и теперь уже можно обеспечить различными букетами 21 сотрудницу.

При изменении текстовых формулировок комбинаторных задач требуется соблюдать осторожность, так как небольшое и на первый взгляд незаметное изменение в тексте условия при сохранении числовых данных может не только изменить ответ, но и многократно повысить степень сложности задачи. Простым примером может служить такая пара задач: «Сколькими способами можно заселить 8 жильцов в 10 номерах гостиницы? Сколькими способами можно покрасить стены в этих номерах если имеются 8 типов краски?». Обе задачи относятся к категории задач на размещения, часто обращают внимание на то, что первая задача это размещение без повторений, а вторая – с повторениями, но это не единственной различие данных задач. Дело в том, что при решении первой задачи мы осуществляем выбор номера для жильца – для первого можно выбрать любой из 10 номеров, для второго – любой из оставшихся 9 и т.д. И тогда в аналогичной задаче с повторениями можно было бы ожидать, что ответом будет 10^8 (10 способов для первого, десять для второго и т.д.), что, однако, совершенно не верно. При решении второй задачи, мы уже осуществляем выбор не номера гостиницы для краски, а краски для номера. Первый номер можно покрасить любым из 8 цветов, второй – также любым из 8 и т.д., откуда правильным решением задачи является 8^{10}. Таким образом, при изменении формулировки могут поменяться «роли»: что является «местом», а что – «объектами, размещаемыми на данных местах». К гораздо более сложной ситуации можно прийти, рассмотрев попытки переформулировать, например, классическую задачу о распределении 12 учебников поровну между 4 школьниками [1, с. 24, № 104]. Решить данную задачу можно так: каждому школьнику полагается в этой ситуации 3 учебника, выберем первому школьнику три учебника, так как порядок выбора не важен это можно сделать C_{12}^3 способами, второму можно уже выбрать из оставшихся 9 (C_9^3), третьему из 6 (C_6^3), последнему же отдать все оставшиеся учебники (всего $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3$ способов). Не сложно изменить сюжет данной задачи, например, таким образом «В офисе имеется 4 комнаты, в которых работают 12 сотрудников. Для улучшения сплоченности в коллективе начальник хочет организовать рабочий процесс так, чтобы сотрудники регулярно (например, раз в неделю) меняли свои рабочие места с тем, чтобы они оказывались в одних помещениях с новыми сотрудниками, с которыми они смогли бы познакомиться поближе. Сколько недель потребуется начальнику для того, чтобы исчерпать все возможные варианты распределения сотрудников?». На первый взгляд – это та же самая задача о «распределении 12 сотрудников между 4 офисами». На самом же деле в формулировке задачи есть много неясностей. Во-первых, не сказано, что распределять сотрудников между офисами необходимо поровну (если убрать это требование в первой задаче, она из задачи на сочетания превращается в задачу на размещение – не поровну можно распределить 12 учебников между 4 школьниками 4^{12} способами – первый учебник можно отдать любому из школьников, второй тоже и т.д.). Устранить этот недочет можно, добавив требование, чтобы сотрудники распределялись по комнатам поровну. Во-вторых, не понятно, устроит ли начальника вариант, когда все сотрудники из одной комнаты просто тем же коллективом перейдут в другую комнату. Из контекста напрашивается вывод, что такое перераспределение не соответствует цели начальника. А вот анализ того, какие возможны варианты распределения сотрудников с тем, чтобы хотя бы коллективы в рамках комнат не повторялись дважды – это уже комбинаторная задача совершенно иного порядка сложности. А если мы еще и потребуем, чтобы ни один из сотрудников не оказывался дважды в одной комнате с другим сотрудником (а может, именно этого хотел начальник?), то мы уже получим задачу, которая даже оказывается не разрешимой при сохранении требования, чтобы каждый сотрудник поработал хотя бы раз с каждым. Кроме того, в задаче еще и не очень явно присутствует требование, чтобы каждый сотрудник менял свое место каждую неделю (может ли он при этом оставаться в той же комнате на следующей неделе, и, к примеру, просто поменять стол, или это является недопустимым – вопрос, на который нет ответа в условии задачи). Как видим, в результате такой «переформулировки» мы пришли к совершенно иной задаче, допускающей различные толкования текста (и, следовательно, различные решения) и которая существенно превосходит по сложности исходную. Также радикально увеличится сложность задачи про учебники, если мы сформулируем ее, например, так: «Сколькими способами можно распределить 12 учебников между 4 школьниками так, чтобы каждому школьнику досталось **хотя бы** по одному учебнику?». Таким образом, совсем незначительные изменения в текстах комбинаторных задач могут существенно ухудшить ситуацию с ее решением и превратить ее из стереотипной в недоступную для большинства школьников. Поэтому при составлении таких задач необходим тщательный анализ допустимости и правомерности переноса выводов с одних объектов на другие, о сохранении допустимости всех вариантов решения одной задачи при новой формулировке (и при возврате к старой). Необходимо избегать также и возможности разночтений в понимании текста.

На примере представленных выше задач можно убедиться, что для обеспечения возможности переформулировать задачу, необходимо выделить ее логическую конструкцию. Для этого нужно предварительно решить задачу, выделить то, какие условия являются существенными, а какие можно убрать или добавить, установить, что существенно влияет на способ решения задачи, а что не играет принципиально важной роли, постараться сформулировать задачу в общем виде, отвлекаясь от конкретных данных. Тогда, на основе построенной модели, уже можно создавать новые задачи, которые будут решаться так же, но внешне будут полностью иными.

Список использованных источников

1. Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник практикум по теории вероятностей. – М.: Просвещение, 1979. – 112 с.

2. Глухова Н.В., Фолиадова Е.В. Олимпиадные и исследовательские задачи в общем и профессиональном математическом образовании: учебное пособие для подготовки магистров и бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» физико-математического профиля. Ульяновск: УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2018. 66 с.
3. Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004. 560 с.
4. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. М.: Просвещение, 1986. 156 с.
5. Лётчиков А.В. Принцип Дирихле. Ижевск: Издательство Удмуртского университета, 1992. 110 с.
6. Электронный ресурс URL: https://habr.com/post/256293/ (дата обращения: 14.10.2018)
7. Бабкина О.П., Трухачева Е.С., Глухова Н.В. Применимость понятий высшей алгебры к олимпиадным задачам: задачи на делимость. Электронный журнал URL: Электрон. журн. — 2018. — №5. — Режим доступа: http://journal-no.ulspu.ru. – С. 124 – 133. (дата обращения: 14.10.2018)