УДК: 512:62, 511:2

ББК: 22:131, 22:14, 74:262:21

Применимость понятий высшей алгебры к олимпиадным задачам: задачи на делимость

Бабкина Олеся Петровна,

студент 4 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Математика. Информатика», ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Трухачева Елизавета Сергеевна,

студент 4 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Математика. Информатика», ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Глухова Наталья Владимировна,

кандидат биологических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Исследование выполнено в рамках внутривузовского гранта для поддержки научных коллективов ФГБОУ ВО "УлГПУ им. И.Н.Ульянова".

Аннотация. В работе рассмотрены различные методы решения олимпиадных задач на делимость и показано, как применение понятий высшей математики может помочь школьному учителю в подготовке школьников к математическим олимпиадам. Представлено несколько новых задач, которые могут быть использованы при проведении олимпиад.

Ключевые слова. Олимпиадная математика, делимость, симметрические многочлены, сравнимость по модулю, классы вычетов.

В современной школе разнообразные предметные олимпиады начинают играть все большую роль. Олимпиады могут давать победителям и призёрам некоторые привилегии, например, при поступлении в высшие учебные заведения, дают они и преимущества учителям и школам, их подготовившим. Подготовка к математическим олимпиадам для школьников является хорошей подготовкой к научной деятельности [4, с 133], развивает интеллект, повышает математическую грамотность. Подготовка и проведение математических олимпиад школьников в современном информационном обществе ставит перед учителем многие новые вызовы. Во-первых, сама необходимость отдельной работы с одаренными детьми диктуется как внешними требованиями, предъявляемыми к школам в качестве критерия качества их работы, так и внутренними условиям, в которых усилилась вариативность уровня знаний школьников, их заинтересованность (большая или меньшая) в изучении математики. Работа с одаренными детьми должна проводиться как в рамках основной работы учителя, так и во внеурочной деятельности – в формате кружков, специальных занятий по подготовке к олимпиадам. И здесь возникают вопросы о том, кто должен заниматься с одаренными школьниками, а точнее, любой ли учитель к этому способен или же учить одаренных детей должен также «одаренный» учитель, который сам в детстве был участником, а лучше призером математический олимпиад. Конечно, было бы прекрасно, если бы с одаренными учениками занимались одаренные учителя, но свершено ясно, что количество таких учителей крайне недостаточно, и маловероятно, чтобы такой учитель нашелся в каждой школе. Поэтому модель «одарённый ученик – одарённый учитель» необходимо требует проведения процедур отбора одаренных детей, чтобы потом целенаправленно отправлять их на обучение к специально подготовленным учителям. Но даже вопрос о том, как понять, кто из школьников действительно является одаренным, встает в современных условиях гораздо острее, чем это было ранее, так как в настоящее время все сложнее становится подобрать конкурсные задачи так, чтобы ученик не мог найти их готовые решения где-нибудь в интернете. Ведь представление правильного списанного с Интернет-ресурса решения никак не дает гарантий одаренности ребенка. Та же проблема возникает и при подготовке детей к олимпиадам «на местах». Если раньше возможность учителя, даже и не очень способного, работать с одаренными детьми определялась его большей осведомленностью (то есть у учителя был учебник или тетрадь, в которой были представлены олимпиадные задачи с решениями, а у школьника не было готовых решений задач – это позволяло учителю и давать детям такие задачи, решения которых им не известны, и объяснять методы их решения, и проводить отбор – кто более способен, а кто нет), то теперь такого преимущества у учителя нет. Ребенок может найти решение любой готовой задачи в интернете, и часто может это сделать даже быстрее, чем учитель. Поэтому перед учителем необходимо встает вопрос об умении самому не просто решать, но и составлять олимпиадные задачи – для того, чтобы эти задачи были новыми, и чтобы нельзя было найти их решения в готовом виде. То есть учитель уже должен иметь не только знания о том, как решаются те или иные задачи, а о том, каким образом они составляются.

В представленной работе мы предлагаем некоторые пути решения проблемы составления новых задач, а также нахождения новых методов решения уже известных задач с помощью понятий и терминов курса высшей математики (в настоящей работе – высшей алгебры). Ведь чаще всего именно знание каких-то более общих теорем и фактов позволяет составлять весьма сложные задачи, обычно применяемые при проведении олимпиад. Поэтому знание каких-то специальных алгоритмов и терминологии позволяет решать олимпиадные задачи даже тем, кто не имеет специальных способностей к олимпиадной математике. При этом, как мы надеемся показать в работе, нет необходимости объяснять детям все эти алгоритмы и термины – достаточного того, что учитель владеет ими, а с их помощью он уже может как придумывать новые задачи, так и находить их решения в терминах основного школьного курса. В качестве основной иллюстрации рассмотрим несколько различных способов решения следующей олимпиадной задачи: «Известно, что $a + b + c$ кратно 6, числа a, b, c целые. Доказать, что $a^3 + b^3 + c^3$ кратно 6» [3, с. 4]. Наиболее известный способ решения данной задачи можно обозначить как способ «*Выделение последовательных множителей».* Он основан на том, что среди n последовательных натуральных чисел всегда имеется одно, которое делится без остатка на n. Сделаем небольшие преобразования:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + (a + b + c) – a – b – c =$$
$$= (a + b + c) + (a^3 – a) + (b^3 – b) + (c^3 – c)$$

Рассмотрим выражение $a^3 – a = a (a^2 – 1) = (a – 1) a (a + 1)$. Так как a – 1, a, a + 1 – это три последовательных числа, то одно из них будет кратно 3, и в последовательности из трёх чисел как минимум одно будет чётным. Так как числа 2 и 3 взаимно простые, $(a^3 – a) \vdots 6$. Аналогичными рассуждениями доказываем, что $(b^3 – b)$ и $(c^3 – c)$ также делятся на 6. Далее, (a + b + c) кратно 6 по условию задачи, следовательно, по свойству делимости суммы, вся правая часть равенства

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c) + (a^3 – a) + (b^3 – b) + (c^3 – c)$$

кратна 6. Значит, $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 6. Данный способ является весьма красивым, относится к методам олимпиадной математики. Опираясь на данный метод можно, например, решить задачу «Известно, что p – простое число, большее 3. Доказать, что $p^2 – 1$ делится на 24» [1, с. 18]. Распишем $p^2 – 1$ по формуле разности квадратов:

$$p^2 – 1 = (p – 1) (p + 1)$$

Так как p – простое число, большее 3, p – нечетное, и p не делится на 3. Рассмотрим последовательность (p – 1), p, (p + 1). В данной последовательности из трёх чисел одно точно будет делиться на 3, и это будет не p, а значит, будет делиться на 3 и произведение двух оставшихся чисел, то есть $(p^2 – 1)$. Кроме того, числа (p – 1) (p + 1) будут чётными (поскольку p является нечётным числом) и это последовательные четные числа, следовательно, одно из чисел $(p – 1)$ и $(p + 1)$ будет делиться на 2, а второе на 4. Следовательно, произведение чисел $(p – 1)(p + 1)$, будет делиться на 8. Так как числа 3 и 8 взаимно простые, следовательно, исходное выражение $(p^2 – 1)$ делится и на произведение чисел 3 и 8, то есть на 24.

Две представленные задачи могут послужить источником генерации множества новых задач. Например, рассмотрев произведение $(p^2 – 1)(p^2 – 4)$ получим уже произведение пяти последовательных чисел (включая p) и, следовательно, сохранив условия задачи о простоте p и потребовав, чтобы p было больше 5, можно легко, аналогичным образом, доказать, что $(p^4 – 5p^2 + 4)$ делится на 120. В исходной задаче о делимости на 6 суммы $(a^3 + b^3 + c^3)$ можно увеличить количество слагаемых, что не повлечет усложнения задачи.

Можно различным образом комбинировать полученные задачи, например, можно сформулировать такую задачу: «Известно, что числа a, b, c, d – простые, большие 3, также известно, что сумма $(a + b + c + d)$ делится на 24. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ кратно 24». Действительно, тогда

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 – a + b^3 – b + c^3 – c + d^3 – d + (a + b + c + d) =$

$= a(a^2 – 1) + b(b^2 – 1) + c(c^2 – 1) + d(d^2 – 1) + (a + b + c + d).$

Каждое слагаемое в отдельности делится на 24, как было доказано выше (при построении таких задач, хотелось бы обратить внимание на то, что количество слагаемых в исходной сумме должно быть четным, иначе условие делимости на 24 не может быть выполнено в силу того, что это сумма четырех нечётных чисел). В то же время вполне допустимо увеличить количество слагаемых, например, до 6 или 8. Возможно рассмотрение и целого ряда других аналогичных задач.

В исходном примере достаточно сложно было догадаться, какое конкретно преобразование необходимо выполнить для получения необходимого результата. Можно предложить еще несколько способов решения данной задачи, которые носят более алгоритмический характер и применимы к широкому кругу задач.

В теории симметрических многочленов [2, с. 46] доказывается, что каждую степенную сумму $S_n = x^n + y^n + z^n$ можно представить в виде многочлена от элементарных (основных) симметрических многочленов σ_1, σ_2, σ_3 ($\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + ac + bc$, $\sigma_3 = abc$). В нашем примере имеется степенная сумма $a^3 + b^3 + c^3$. Представим его в виде многочлена от σ_1, σ_2, σ_3:

$$a^3 + b^3 + c^3 = S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \quad [2, с. 47].$$

Таким образом,

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc.$$

Первые два слагаемых очевидным образом делятся на 6, так как содержат в себе множитель $(a + b + c)$, который делится на 6 по условию задачи.

Остается доказать, что последнее слагаемое делится на 6. Так как в нем уже содержится множитель 3, значит необходимо только показать, что abc делится на 2. Если хотя бы одно из чисел a, b, c – четные, то произведение делится на 2. Предположим, что abc не делится на 2, тогда все числа a, b, c должны быть нечётными, но тогда и сумма трех нечетных чисел, то есть $(a + b + c)$ тоже будет нечетной, а это противоречит условию, что $(a + b + c)$ делится на 6 (то есть четна). Значит хотя бы одно из чисел a, b, c должно быть четным, а следовательно, последнее слагаемое тоже делится на 6.

Применение данного метода не обязательно требует знакомства школьников с теорией симметрических многочленов (хотя, возможно, это будет и полезным в рамках какого-либо элективного курса). Этот способ может быть только подсказкой для учителя, как разложить многочлен. Получить же это представление можно также добавлением и вычитанием слагаемых. Как найти эти слагаемые может подсказать раскрытие скобок в выражении, полученном с помощью формул, выведенных в теории симметрических многочленов. Так

$$(a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc =$$

$$= (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3ab - 3ac - 3bc) + 3abc =$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 3ab - 3ac - 3bc - ab - ac - bc) +$$

$$+ 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc =$$

$$= a^3 + ba^2 + ca^2 + ab^2 + b^3 + cb^2 + ac^2 + bc^2 + c^3 - ba^2 - ab^2 - abc - a^2c - abc - -$$

$$ac^2 - abc - bc^2 - b^2c + 3abc = a^3 + b^3 + c^3,$$

что позволяет представить решение следующими образом:

$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + ba^2 - ba^2 + ca^2 - ca^2 + ab^2 - ab^2 + cb^2 - cb^2 + ac^2 - ac^2$ $+ + bc^2 - bc^2 - abc - abc - abc + 3abc = a^3 + ba^2 + ca^2 + ab^2 + b^3 + cb^2 + ac^2 + bc^2$ $+$

$$+ c^3 - ba^2 - ab^2 - abc - a^2c - abc — ac^2 - abc - b^2c - bc^2 + 3abc =$$

$= a^2(a + b + c) + b^2 (a + b + c) + c(a + b + c) - ab(a + b + c) - ac(a + b + c) -$

$$- bc (a + b + c) + 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc =$$

$$= (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3ab - 3ac - 3bc) + 3abc =$$

$$= (a + b + c)^3 - 3 (a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc.$$

Доказательство делимости аналогично отмеченному выше. Отметим, что метод симметрический многочленов может послужить эффективным источником генерации очень сложных задач, пригодных для применения в олимпиадах более высокого уровня. Например, можно составить такую задачу:

Дан многочлен $(a^5 + b^5 + c^5) + 5(ab + ac + bc)abc$. Требуется доказать, что он делиться на $(a + b + c)$.

Решение: Степенную сумму представляет выражение $(a^5 + b^5 + c^5)$. Представим его в виде многочлена от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$a^5 + b^5 + c^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 \text{ ,[2, с. 47]}$$

Тогда

$$(a^5 + b^5 + c^5) + 5(ab + ac + bc)abc = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 +$$

$$+5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3 =$$

$$= (a + b + c)^5 - 5(a + b + c)^3(ab + ac + bc) + 5(a + b + c)(ab + ac + bc)^2$$

$$+$$

$$+ 5(a + b + c)^2abc$$

Здесь каждое слагаемое содержит в себе множитель $(a + b + c)$, а следовательно делится на него.

Источником данной задачи служит таблица степенных сумм [2, с. 47]. Из формулы:

$$a^5+b^5+c^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3$$

видим, что все слагаемые в правой части, кроме последнего, делятся на σ_1. Перенеся это слагаемое в левую часть равенства получили представленную задачу.

Четвертый способ решения исходной задачи может быть получен, если мы просто попробуем поделить столбиком исходный многочлен на $a + b + c$.

$$\begin{array}{l|l}
a^3+b^3+c^3 & a+b+c \\ \cline{2-2}
\underline{a^3+ba^2+ca^2} & a^2-a(b+c)+(b+c)^2 \\
-ba^2-ca^2+b^3+c^3 & \\
\underline{-a^2(b+c)-ab(b+c)-ac(b+c)} & \\
\quad a(b^2+bc+cb+c^2)+b^3+c^3 & \\
- & \\
\quad \underline{a(b+c)^2+(b+c)^3} & \\
\quad\quad b^3+c^3-(b+c)^3 &
\end{array}$$

Остаток $b^3+c^3-(b+c)^3$ преобразуем, применив известные формулы сокращенного умножения, и получим

$$b^3+c^3-(b+c)^3=-3b^2c-3bc^2=-3bc(b+c).$$

Тогда по теореме о делении с остатком получим:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2-a(b+c)+(b+c)^2-3bc(b+c)$$

Первое слагаемое, очевидно, делится на 6. Осталось доказать, что $-3bc(b+c)$ также делится на 6. Очевидно, что это слагаемое делится на 3, докажем теперь, что оно четно. В отличие от второго и третьего способов решения, для этого даже не требуется применения исходного условия делимости на 6 суммы всех трех слагаемых. Действительно, если среди чисел b и c хотя бы одно четно, то и все выражение четно; если же они оба нечетны, то их сумма $(b+c)$ будет четной, следовательно, $bc(b+c)$ делится на 2 при любых целых b, c, а таким образом, мы доказали, что $-3bc(b+c)$ делится на 6.

Пятый способ основан на исследовании возможных остатков от деления на 6.

Понимая то, что остатками от деления на 6 могут быть числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, можно сказать, что всякое целое число имеет вид:

$$6k, (6k + 1), (6k + 2), (6k + 3), (6k + 4), (6k + 5).$$

Далее, так как

$(6k + r)^3 = (6k)^3 + 3(6k)^2r + 3\cdot 6kr^2 + r^3 = 216k^3 + 108k^2r + 18kr^2 + r^3$

где три первых слагаемых делятся на 6, то остаток от деления куба числа будет определяться только тем, какой остаток от деления на 6 дает r^3.

Рассмотрим все возможные варианты:

$1^3 = 1$, остаток 1

$2^3 = 8$, остаток от деления на 6 равен 2

$3^3 = 27$, остаток от деления на 6 равен 3

$4^3 = 64$, остаток равен 4

$5^3 = 125$, остаток равен 5.

Как видим, во всех случаях остаток от деления r^3 на 6 совпадает с r. Так как сумма чисел a + b + c делится на 6 по условию, значит, и сумма остатков от деления на 6 каждого в отдельности числа тоже делится на 6. Из показанного выше ясно, что остаток от деления на 6 выражения $(a^3 + b^3 + c^3)$ совпадет с остатком от деления на 6 выражения (a + b + c), то есть тоже делится на 6.

Данный результат был получен при помощи сведений из теории сравнений [6, с 87 – 96], согласно которым мы имеем, что $a^3 \equiv a \pmod 6$ и

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c \pmod 6.$$

Поэтому знание теории сравнений, полезно для нахождения решения данной задачи, но, как показано выше, это решение можно представить школьникам и без введения данной терминологии.

Можно также отметить, что указанные задачи вполне могут послужить и основой для проектной деятельности учащихся [5, с. 161 – 163]. Школьники могут рассматривать различные методы решения задач, исследовать и сопоставлять возможности применения различных методов, а также находить или самостоятельно составлять аналогичные усложненные задачи.

Список литературы

1. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975. 110 с.
2. Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. 2–е изд. М.: МЦНМО, 2002. 240 с.
3. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для 10–11 кл. сред. шк. / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990. 48с.
4. Глухова Н. В., Фолиадова Е. В. О применении задач с междисциплинарным содержанием при проведении олимпиад среди школьников и студентов // Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике в условиях стандартизации образования. Материалы Всерос. науч.-практ. конф. препод. мат., информ. школ и вузов. Ульяновск: УлГПУ, 2016. С. 133–139.
5. Куренева Т. Н. Обучение будущих учителей организации проектной деятельности школьников // Сибирский педагогический журнал. 2015. № 2. С. 161–165.
6. Матрос Д. Ш., Поднебесова Г. Б. Элементы абстрактной и компьютерной алгебры. М.: «Академия», 2004. 240 с.